Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32 03/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PTI CRITICI VINCOLATI – MOLTIPLICATORI DI L.

ABBIAMO VISTO IL CASO

$$V = \{ G(x) = 0 \} \quad \text{dove} \quad G : \underset{\cup}{\overset{\mathbb{R}^N}{}}\Omega \to \mathbb{R}^K \qquad K < N$$

(+ IPOTESI SU J_G)

VINCOLO BILATERO DI CODIMENSIONE K

ALTRO CASO: DOMINIO REGOLARE

$D \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio regolare a tratti se

- D è chiuso
- $\exists$ Ω aperto con $D \subset \Omega$ ed esistono $G_1 \dots G_M : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che
  - $D = \{ x \in \Omega : G_1(x) \le 0, \dots , G_M(x) \le 0 \}$
  - (N.T.) Se $i_1 \dots i_h$ sono indici tra 1 e M, se $G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_h}(x) = 0$, allora

$\nabla G_{i_1}(x) \dots \nabla G_{i_k}(x)$ sono linearmente indipendenti

$\left(\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\, G_{i_1} \cdots G_{i_k}}{\partial\, X}(x) \text{ ha rango } k \right)$

SE C'È UNA SOLA G (nel qual caso (N.T.) significa $\nabla G(x) \neq 0$ $\forall x$ con $G(x)=0$) allora D è regolare.

DI SOLITO D lo prendo limitato (così vuole Weierstrass)

<u>Teorema</u> Se D, Ω, e $G_1 \dots G_M$ sono come sopra (G_i sono "definenti" per D), se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, se $X_0 \in D$ è punto di max / min locale per f su D

allora: se $i_1 \dots i_k$ sono gli indici per cui $G_i(x_0)=0$ (potrebbe essere che non ce ne sia nessuno $\Leftrightarrow X_0 \in \mathring{D} \Leftrightarrow G_i(x_0) < 0$), allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ per cui

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla G_{i_j}(x_0)$$

IN ALTERNATIVA, la tesi si può anche dire così:

$\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_M$ tali che

$$\rightarrow \quad \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \nabla G_j(x_0) \quad \text{e} \quad \lambda_j G_j(x_0) = 0$$

I PUNTI X_0 con le proprietà scritte sopra si chiamano "pti critici vincolati di f su D"

i moltiplicatori relativi a delle G_i che non si annullano, sono zero

<u>NO DIM.</u>

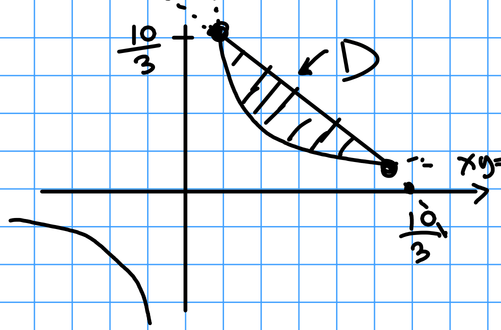
<u>ESEMPIO</u> Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1,\ 3x+3y \leq 10,\ x>0\}$$

Sia inoltre $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

TROVARE TUTTI I PUNTI CRITICI VINCOLATI e poi trovare (se esistono)

$\max_D f \ / \ \min_D f$.



Posso prendere $\Omega = \{x>0, y>0\}$

e $G_1(x,y) = 1 - xy$

$G_2(x,y)\ \ 3x+3y-10$

È chiuso da $D = \{P \in \Omega : G_1(P) \leq 0, G_2(P) \leq 0\}$

Vediamo se è vero (N.T.). VA DISTINTA IN 3 CASI

- Se (x,y) è tale che $G_1(x,y) = 0$ deve essere $\nabla G_1(x,y) \neq 0$

  Ho che $\nabla G_1 = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$. $\nabla G_1(x,y) = 0 \iff x=0, y=0$

  ma $G_1(0,0) = 1 \neq 0$

- Se (x,y) è tale che $G_2(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla G_2(x,y) \neq 0$

  Ma $\nabla G_2(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Se $G_1(x,y) = G_2(x,y) = 0$ ∇G_1 e ∇G_1 devono essere lin. indip. Se fossero lin. dip. sarebbe

  $$\det \begin{bmatrix} -y & 3 \\ -x & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x = y$$

  Se $y = x \Rightarrow G_1(x,x) = 1 - x^2$; se $G_1(x,x) = 0$ deve essere $x = 1$ ma $G_2(1\ 1) = 3+3-10 \neq 0$

  DUNQUE (N.T.) è vero. <u>D è regolare e chiuso</u>

Vediamo i punti critici $P = (x,y)$ di f su D. DOBBIAMO DISTINGUERE VARI CASI

(1) $G_1(P) < 0\ \ G_2(P) < 0$ $\quad (P \in \mathring{D})$. La condizione è

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \nabla f(P) = 0 \qquad \text{(NO MOLTIPLICATORI)}$$

$\iff \begin{matrix} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{matrix} \iff (x,y) = 0$ MA $(0,0) \notin D$

NESSUN PUNTO DI QUESTO TIPO

(2A) $G_1(P) = 0 \quad G_2(P) < 0$ Devo risolvere

$$\nabla g(P) = \lambda \nabla G_1(P) \qquad \text{cioè}$$

$(0,0)$ NON È ACCETTABILE

$$\begin{cases} 2x = \lambda(-y) \\ 8y = \lambda(-x) \\ xy = 1, \quad 3x+3y<10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 8y = 0 \\ xy=1, \quad 3x+3y<10 \end{cases} \leftarrow \det \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 8 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^2 = 16$$
$$\lambda = \pm 4$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{cases} 2x + 4y = 0 \iff x = -2y \\ (4x + 8y = 0) \\ \underbrace{-2y^2 = 1}_{\text{IMPOSS.}} \quad , \ldots \end{cases}$$

$$\lambda = -4 \quad \begin{cases} x = 2y \\ (\rule{2em}{0.4pt}) \\ 2y^2 = 1 \quad 9y < 10 \end{cases}$$

$y = \pm 1/\sqrt{2} \qquad x = \pm\sqrt{2}$

(MA $x > 0$ dunque solo quello con il $+$)

$$\boxed{(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)}$$

è OK.

$\leftarrow$ devo controllare se $9\frac{\sqrt{2}}{2} < 10 \iff 9\sqrt{2} < 20$ <u>OK</u>

(2B) $G_1(P) < 0 \quad G_2(P) = 0$. Devo risolvere

$$\nabla G(P) = \lambda \nabla G_2(P) \qquad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda \\ 8y = 3\lambda \\ xy > 1, \quad 3x+3y=10 \end{cases} \implies 2x = 8y \iff x = 4y$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{3} \\ x = 4y \\ 4y^2 > 1 \quad 15y = 10 \end{cases} \implies \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

controllo che $4y^2 > 1$

$4\left(\frac{2}{3}\right)^2 > 1 \qquad \frac{16}{9} > 1$ <u>VERA</u>

$$\boxed{\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

(3.) $G_1(P) = G_2(P) = 0$ IN QUESTO CASO HO

$$\nabla g(P) = \lambda \nabla G_1(P) + \mu \nabla G_2(P)$$

$\leftarrow$ SEMPRE VERA PERCHÉ SIAMO IN $\mathbb{R}^2$

DUNQUE DEVO SOLO TROVARE I PUNTI IN CUI

$xy = 1$, $3x + 3y = 10$

$y = \frac{1}{x}$, $3x + \frac{3}{x} - 10 = 0$ $\quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{cases} 3 \\ 1/3 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(3, \frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{1}{3}, 3\right)}$$

IN TUTTO HO 4 punti critici vincolati

Se voglio trovare max / min di f su D SO CHE ESISTONO PER WEIERSTRASS, basta calcolare f in questi punti:

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2) = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$ MIN

$f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{80}{9}$ $\quad (>4)$

$f\left(\frac{1}{3}, 3\right) = \frac{1}{9} + 4 \cdot 9 = 36 + \frac{1}{9}$ MAX

$f(3, 1/3) = 9 + \frac{4}{9} = 9 + \frac{4}{9}$

TEOREMA GENERALE

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Abbiamo K funzioni $G_1 \dots G_K$ e h funzioni $H_1 \dots H_h$ tutte di classe C^1. Poniamo

$$M = \{x \in \Omega : G_1(x) \leq 0 \dots G_K(x) \leq 0, H_1(x) = 0, \dots, H_h(x) = 0\}$$

(K vincoli di disuguaglianza, h vincoli di eguaglianza)

SUPPONIAMO:

Se $x \in M$ e se $i_1 \dots i_r$ sono gli indici (tra 1 e k) per

(N.T.) cui $G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_r}(x) = 0$, allora

$\nabla G_{i_1}(x) \dots \nabla G_{i_r}(x), \nabla H_1(x), \dots, \nabla H_h(x)$ sono lin. indip.

(prendo solo i ∇G_i per le G_i che si annullano in x)

Abbiamo anche una $f: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Se $x_0 \in M$ è punto di max/min locale per f su M

allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_k$, $\mu_1 \dots \mu_k$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_k G_k(x_0) + \mu_1 \nabla H_1(x_0) + \dots + \mu_h \nabla H_h(x_0)$$

e inoltre $\lambda_1 G_1(x_0) = \dots = \lambda_k G_k(x_0) = 0$

(se $G_i(x_0) < 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$)

(Come prima chiamo pti stazionari (critici) vincolati per f su M un x_0 come sopra)

ESEMPIO $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \quad x - y + z = 0\}$

$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

Vediamo se riusciamo a trovare $\boxed{\max_M f \quad / \min_M f}$

N.B. Qui $\Omega = \mathbb{R}^3$; M è limitato (è contenuto nel disco di raggio 1) ed è chiuso. $\Rightarrow$ vale Weierstrass $\Rightarrow \exists$ max/min di f su M.

Devo trovare tutti i pti critici vincolati e calcolarci sopra f.

Possiamo definire $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \Rightarrow \nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$,

e $H(x,y,z) = x - y + z \Rightarrow \nabla H = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$M = \{P \in \mathbb{R}^3 : G(P) \leq 0, \ H(P) = 0\}$$

Inoltre $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$. Per trovare i pti critici P devo distinguere due casi

(1) $G(P)<0 \Rightarrow \nabla f(P) = \mu \nabla H(P)$ cioè

$$\begin{cases} -2x = \mu \\ -2y = -\mu \\ 1 = \mu \\ x^2+y^2+z^2<1, \ x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = y-x = 1 \end{cases}, \ \underline{\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1<1}} \quad \text{NO}$$

NESSUN PTO CRITICO

(2) $G(P)=0 \Rightarrow \nabla f(P) = \lambda \nabla G(P) + \mu \nabla H(P)$

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x + \mu \\ -2y = 2\lambda y - \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+z^2=1, \ z = y-x \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I° per x / LA II° PER y / LA III° per z e sommo

$$\begin{aligned} -2x^2 &= 2\lambda x^2 + \mu x \\ -2y^2 &= 2\lambda y^2 - \mu y \\ z &= 2\lambda z^2 + \mu z \end{aligned}$$

$$z-2x^2-2y^2 = 2\lambda + 0$$

$$\boxed{2\lambda = z-2x^2-2y^2}$$

$$2\lambda = z+2z^2-2$$

usiamo la III° per calcolo μ:

$$\mu = 1-2\lambda z = 1-z(z+2z^2-2)$$

$$2\lambda = 2z^2+z-2, \quad \mu = -2z^3-z^2+2z+1$$

$\text{I}°-\text{II}° \rightarrow$
$$\begin{aligned} -2x+2y &= 2\lambda x - 2\lambda y + 2\mu \\ 2(y-x) &= -2\lambda(y-x) + 2\mu \qquad (\text{uso } y-x=z) \\ 2z &= -2\lambda z + 2\mu \\ 2z &= -(2z^2+z-2)z - 4z^3 - 2z^2 + 4z + 2 \\ \cancel{2z} &= -2z^3 - z^2 + \cancel{2z} - 4z^3 - 2z^2 + 4z + 2 \\ 0 &= -6z^3 - 3z^2 + 4z + 2 \end{aligned}$$

← NON SEMBRA ELEMENTARE

A QUESTO PUNTO DOVREI RISOLVERE IN z, USANDO LE ALTRE DUE EQUAZIONI $x^2+y^2+z^2=1$, $x-y+z=0$ trovo x e y

$$0 = -3z^2(2z+1) + 2(2z+1) \iff (2z+1)(2-3z^2)$$

$$z = -\frac{1}{2} \qquad z^2 = \frac{2}{3} \qquad z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$z = -\frac{1}{2}$ $\quad \begin{cases} x^2+y^2 = 3/4 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}+y \\ \frac{1}{4}+y+y^2+y^2 = 3/4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}+y \\ 2y^2+y-\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

$$4y^2+2y-1=0 \qquad y = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4} \qquad y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \qquad z = -\frac{1}{2}$$

$z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1/3 \\ x-y = \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

SI POSSONO FINIRE I CONTI, MA LASCIAMO STARE — L'IMPORTANTE È CAPIRE IL METODO

OSS. Nel caso generale, in cui ho

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad G_1 \cdots G_K : \Omega \to \mathbb{R} \quad H_1 \cdots H_h : \Omega \to \mathbb{R}$

(+ ipotesi N.T.) e prendo $M = \{ G_i \leq 0,\ H_i = 0 \}$

Allora i punti critici di f vincolati a M si possono ottenere come punti critici della "Lagrangiana" $\mathcal{L}$ che è definita da

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta) =$$

$x = (x_1 \cdots x_N) \in \Omega$

$\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_K) \in \mathbb{R}^K \qquad \mu = (\mu_1 \cdots \mu_h) \in \mathbb{R}^h, \quad \delta = (\delta_1 \cdots \delta_K) \in \mathbb{R}^K$

$$f - \sum_{j=1}^{h} \mu_j H_j(x) - \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \left(G_j(x) + \delta_j^2\right) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \delta)$$

INFATTI VEDIAMO CHI SONO I PTI CRITICI DI $\mathcal{L}$

Devo eguagliare a zero tutte le derivate di $\mathcal{L}$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{h} \mu_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\iff \nabla f = \sum \mu_j \nabla H_j + \sum \lambda_j \nabla G_j \leftarrow \boxed{\text{MOLTIPLICATORI}}$$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = G_i + \delta_i^2 = 0 \iff \boxed{G_i \leq 0}$$

$$G_i = -\delta_i^2$$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i} = H_i = 0 \qquad \boxed{H_i = 0}$$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_i} = 2\lambda_i \delta_i = 0 \iff \boxed{\lambda_i G_i = 0} \leftarrow G_i = -\delta_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_i \delta_i^2 = 0 \iff \lambda_i G_i = 0$$

DUNQUE I PTI CRITICI <u>LIBERI</u> di $\mathcal{L}$ mi danno i pti critici di f su M.