Claudio Saccon (*)

Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 02/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f = xyz$ su $V = \{x^2+y^2+z^2=1,\ x-y+z=0\}$

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y - \mu \\ xy = 2\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

MOLTIPLICO la I° eq. per x, la II° eq. per y, la III° eq. per z } SOMMO

$$\begin{aligned} xyz &= 2\lambda x^2 + \mu x \\ xyz &= 2\lambda y^2 - \mu y \\ xyz &= 2\lambda z^2 + \mu z \end{aligned}$$

$$3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1} + \mu \underbrace{(x-y+z)}_{0}$$

NON MI INTERESSA CALCOLARE λ...

$\Rightarrow \boxed{2\lambda = 3xyz} \leftarrow$ lo metto nel sistema

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz + \mu \\ xz = 3xy^2z - \mu \\ xy = 3xyz^2 + \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \mu = yz(1-3x^2) \\ -\mu = xz(1-3y^2) \\ \mu = xy(1-3z^2) \\ x^2+y^2+z^2=1,\ x-y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda = 3xyz \\ \mu = yz(1-3x^2) \\ -yz(1-3x^2) = xz(1-3y^2) \quad (A) \\ yz(1-3x^2) = xy(1-3z^2) \quad (B) \\ x^2+y^2+z^2=1, \quad y = x+z \end{cases}$$

MI PIACEREBBE SEMPLIFICARE z nella (A) e y nella (B).

Se avessi $z=0 \Rightarrow$ (A) è ok, (B) $\leftrightarrow$ $0 = xy$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

TROVEREI $\underbrace{(0, \pm 1, 0) \quad \text{oppure} \quad (\pm 1, 0, 0)}_{\text{NESSUNA VERIFICA } y = x+z}$ (perché $x^2+y^2+z^2=1$)

Analogamente se $y=0 \Rightarrow$ (B) è OK e (A) $\leftrightarrow$ $xz=0$. ALLORA

TROVO $(0,0,\pm 1)$ $(\pm 1, 0, 0)$ MA NON VALE $y=x+z$

Posso anche discutere il caso $x=0 \Rightarrow yz=0$ (dalla (A)) e di nuovo trovo $(0,0,\pm 1)$ $(0, \pm 1, 0)$ NON VANNO BENE

DUNQUE Se (x,y,z) risolve il sistema posso dire $\boxed{x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0}$

Posso semplificare

$$-y(1-3x^2) = x(1-3y^2) \quad (A)$$
$$z(1-3x^2) = x(1-3z^2) \quad (B)$$

Usiamo le altre informazioni $y = x+z$, $y^2 = 1-x^2-z^2$

$$-(x+z)(1-3x^2) = x(1-3+3x^2+3z^2) \quad (A)$$
$$z(1-3x^2) = x(1-3z^2) \quad (B)$$

$$-x(1-3x^2) - z(1-3x^2) = x(3x^2+3z^2-2)$$
$$z(1-3x^2) = x(1-3z^2)$$

$$\Rightarrow -x(1-3x^2) - x\cancel{(1-3x^2)} = x(\cancel{3x^2}-1) + x(3z^2-1)$$

$0 = x(1 - 3x^2 + 3z^2 - 1) \Rightarrow \boxed{x^2 = z^2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm z}$

INSERISCO $x^2 = z^2$ IN (A) e (B)

$-y(1-3x^2) = x(1-3y^2)$ (A)

$\pm x(1-3x^2) = x(1-3x^2)$ (B) ← SOLO IL SEGNO +

DUNQUE $z = x$ e rimane

$-y(1-3x^2) = x(1-3y^2) \Leftrightarrow$

$-y + 3x^2y = x - 3xy^2 \Leftrightarrow 3xy(x+y) = (x+y)$

$\rightarrow \begin{cases} x+y=0 & y=-x(=-z) \\ 3xy=1 \end{cases}$

SEGUIAMO LA PRIMA CIOE' $y=-x$ $z=x$ $x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow 3x^2=1$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ NON VERIFICA $x-y+z=0$

SEGUIAMO LA SECONDA

$y = \frac{1}{3x}$ $z = x$

$y = x + z = 2x$

$\Rightarrow$ $y = \frac{1}{3x}$

$\frac{1}{3x} = 2x \Rightarrow \boxed{6x^2 = 1}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad y = \frac{2}{\sqrt{6}}}$$

QUESTA VA BENE $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$x - y + z = 0$

e se si mette nel sistema si vede che effettivamente ho (due) sol.

Se voglio trovare il max e il min devo mettere questi valori dentro f :

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt6}\quad \frac{2}{\sqrt6}\quad \frac{1}{\sqrt6}\right)\right) = \pm\left(\frac{2}{6\cdot\sqrt6}\right) = \pm\frac{1}{3\sqrt6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{(x,y,z)\in V} xyz = \frac{1}{3\sqrt6} \qquad \min_{(x,y,z)\in V} xyz = -\frac{1}{3\sqrt6}}$$

<u>METODO ALTERNATIVO</u> (RICHIEDE DI CAPIRE COME È FATTO V)

$$V = \underbrace{\{x^2+y^2+z^2=1\}}_{\text{sfera di raggio } 1} \cap \{\underbrace{x-y+z=0}_{\text{piano per l'origine}}\}$$

V è una circonferenza in $\mathbb{R}^3$!! COME POTREI DESCRIVERLA?

Se trovo due vettori $\vec v$ e $\vec w$ tali che $\vec v, \vec w \in V$ $(\Rightarrow \|\vec v\|=\|\vec w\|=1)$

$\vec v \cdot \vec w = 0$ allora V è il sostegno della curva

$$\boxed{\gamma(t) = \cos(t)\,\vec v + \sin(t)\,\vec w}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

(CI FIDIAMO DELL'INTUIZIONE)

Se trovo $\vec v$ e $\vec w$ DESCRIVO V "in forma parametrica"

Cerco $\vec v$ e $\vec w$ nel piano $\{y = x+z\}$ ortonormali.

Posso prendere $\vec v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← sta nel piano e ha norma 1

Cerco $\vec w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in modo che $x-y+z=0$ e $\vec w \cdot \vec v = 0$ cioè

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y = 0 \\ y = x+z \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases} \Rightarrow \vec w = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{pmatrix}$$ ← la voglio di norma 1 $\Rightarrow$

$$x^2+y^2+4x^2 = 1 \quad \text{cioè} \quad 6x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt6}$$

Per esempio $\vec w = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Curva della prima

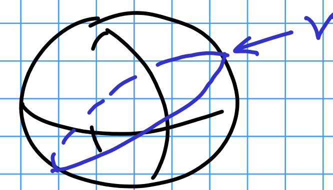
$$V = \Big\{ \underbrace{\cos(t)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}}_{\gamma(t)} \qquad 0 \le t \le 2\pi \Big\}$$

Calcolo $f \circ \gamma(t)$ e trovo

$$f(\gamma(t)) =: \varphi(t) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t)\right) =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - \frac{1}{6}\sin^2(t)\right)\sin(t)$$



Con questa costruzione il $\max\limits_{V} f = \max\limits_{[0,2\pi]} \varphi$

$$\min_{V} f = \min_{[0,2\pi]} \varphi$$

$$\varphi(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - \frac{1}{6}\sin^2(t)\right)\sin(t)$$

$$\varphi'(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\cos(t)\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(t)\cos(t)\right)\sin(t)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - \frac{1}{6}\sin^2(t)\right)\cos(t) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{4}{3}\cos(t)\sin^2(t) + \frac{1}{2}\cos^3(t) - \frac{1}{6}\cos(t)\sin^2(t)\right) =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{9}{6}\cos(t)\sin^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\left(1 - \sin^2(t)\right)\right) =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos(t)\left(-\frac{3}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2(t)\right) =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos(t)\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2(t)\right)$$

$\varphi'(t)=0 \iff \cos(t)=0 \;/\; \sin(t)=\pm\frac{1}{2}$

CON QUESTI VALORI CALCOLIAMO $\varphi(t)$

Se $\cos(t)=0 \Rightarrow \operatorname{sen}(t)=\pm 1 \Rightarrow$

$$\varphi(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{6}\right)(\pm 1) = \pm\frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\left(\varphi(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - \frac{1}{6}\sin^2(t)\right)\sin(t)\right)$$

Se invece $\sin^2(t)=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(t)=\frac{3}{4} \Rightarrow$

$$\varphi(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{4}\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{24}\right) =$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{5}{24}\right) \quad ??$$

NON È CHIARO

CI DEVE ESSERE UN ERRORE DI CALCOLO

LASCIAMO STARE (EVENTUALMENTE LO RICONTROLLO)

ALTRA SITUAZIONE IMPORTANTE IN CUI VOGLIAMA TROVARE max/min di f su D con $D \in \mathbb{R}^N$

$\boxed{D \quad \text{DOMINIO REGOLARE}}$

Def. Sia $D \subset \mathbb{R}^N$. Dico che D è un dominio regolare se

- D è chiuso
- $\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $\exists\, G : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.

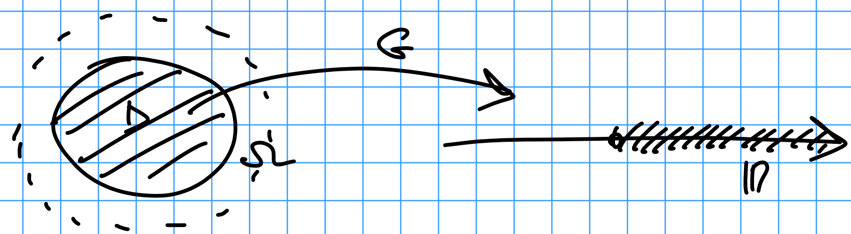
$$D = \{x \in \Omega : G(x) \leq 0\}$$

• $\boxed{\nabla G(x) \neq 0 \quad \text{se } G(x)=0}$

Per esempio $D=\{x^2+y^2+z^2\le 1\}$ è un dom. reg.

Posso prendere $G(x,y,z)=x^2+y^2+z-1$

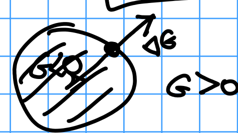
Dunque devo trovare una G ("definente") definita in un "intorno di D"



$$D=G^{-1}(]-\infty,0])$$

OSS. Se D è come sopra $\Longrightarrow$ $\boxed{\partial D=\{x : G(x)=0\}}$

IN EFFETTI SE $x\in\{G=0\}$



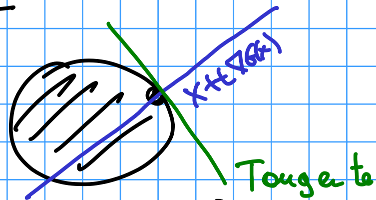
so che $\nabla G(x)\neq 0$. Allora i punti del tipo

$x+t\nabla G(x)$ ↗ $\notin D$ se $t>0$ (perché su questi pti $G>0$)

↘ $\in D$ se $t<0$ (perché su questi pti $G<0$)

OSS. Se $x\in\partial D$, cioè se $G(x)=0$, allora la retta $\{x+t\nabla G(x) : t\in\mathbb{R}\}$ rappresenta la

retta normale a ∂D in x (applicata a x)



mentre $T_x(V)=\{\vec{v} : \nabla G(x)\cdot\vec{v}=0\}$

Def. Dominio regolare a tratti. Se $D\subset\mathbb{R}^N$ dico che è un dominio regolare a tratti se

- D è chiuso
- $\exists\ \Omega$ aperto con $D \subset \Omega$ ed esistono $G_1 \dots G_M : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \{ x \in \Omega : G_1(x) \leq 0 \dots G_M(x) \leq 0 \}$$

- Se $x \in D$ e se $i_1 \dots i_k$ sono contenuti in $\{1 \dots M\}$

(NT) $$\begin{cases} G_{i_1}(x) = G_{i_2}(x) = \dots G_{i_k}(x) = 0 \Rightarrow \\ \nabla G_{i_1}(x) \dots \nabla G_{i_k}(x) \text{ sono lin. indipendenti} \end{cases}$$

(NT) $\leftarrow$ NON TANGENZA. Se c'è uno solo $G \Rightarrow$ (NT) corrisponde a dire che $\nabla G(x) \neq 0$ se $G(x) = 0$ (CASO di prima)

SI VEDE CHE:

- $D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_M$ dove $D_i = \{ G_i(x) \leq 0 \}$

$\Downarrow$ Dominio regolare

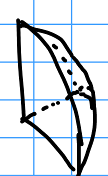
- $\partial D = (\partial D_1 \cap D_2 \dots \cap D_M) \cup (D_1 \cap \partial D_2 \cap \dots \cap D_M) \cup \dots \cup (D_1 \cap D_2 \cap \dots \partial D_M) =$

$\{ G_1(x) = 0, G_j(x) \leq 0\ j \neq 1 \} \cup \{ G_2(x) = 0, G_j(x) \leq 0, j \neq 2 \} \cup \dots$

$\dots \cup \{ G_M(x) = 0, G_j(x) \leq 0 \text{ se } j \neq M \} =$

$$\bigcup_{i=1}^{M} \{ G_i(x) = 0, G_j(x) \leq 0 \text{ se } j \neq i \}$$

ESEMPIO $D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$

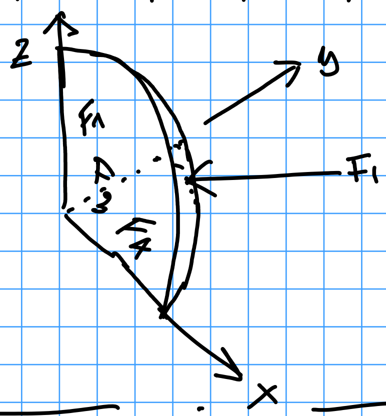
$D \to$ 

$\{ G_1 \leq 0, G_2 \leq 0, G_3 \leq 0, G_4 \leq 0 \}$

$G_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad G_2 = -x$

$G_3 = -y \quad G_4 = -z$

- SI PUÒ VERIFICARE CHE VALE (N.T.)
- $\partial D = \{x^2+y^2+z^2=1 \quad x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\} \cup \{y^2+z^2\leq 1, x=0, y\geq 0, z\geq 0\} \cup$
$\{x^2+z^2\leq 1, x\geq 0, y=0, z\geq 0\} \cup \{x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z=0\}$



$= F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$

(PARTE SFERICA)

- NON IN TUTTI I PUNTI DI ∂D esistono retta normale e piano tangente. CONVIENE DEFINIRE

$$\partial_{reg} D = \bigcup_{i=1}^{M} \{ G_i(x)=0, \quad G_j(x)<0 \quad j\neq i\}$$

(FRONTIERA REGOLARE)

= le x per cui esiste un unico i con $G_i(x)=0$

È chiaro che $\partial_{reg} D \subset \partial D$

I punti di $\partial D \setminus \partial_{reg} D$ sono le x tali che esiste $i\neq j$ per cui $G_i(x)=G_j(x)=0$

Posso dire che $x\in\partial D$ è regolare se $x\in \partial_{reg} D$ — se no dico che x è singolare

Se x è regolare si vede che la retta normale a ∂D in x è la retta $\{x+t\nabla G_i(x) \quad t\in\mathbb{R}\}$
so che è $\neq 0$
dove i è l'unico indice per cui $G_i(x)=0$

Analogamente $T_x(\partial D) = \{\vec{v} : \vec{v}\cdot\nabla G_i(x)=0\}$

- Posso anche introdurre, per ogni $x\in\partial_{reg} D$, il <u>versore normale uscente</u> $\hat{\nu}(x) := \dfrac{\nabla G_i(x)}{\|\nabla G_i(x)\|}$

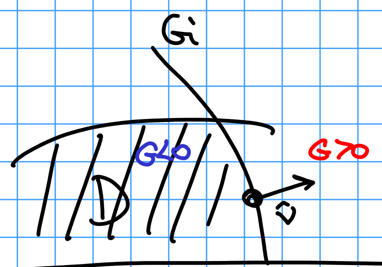
dove, come prima, i è l'unico indice per cui $G_i(x)=0$

$\hat{\nu}$ è un versore normale ed è <u>diretto</u> verso l'esterno.

Infatti se considero $\varphi(t) = G_i(x + t\hat{\nu}(x))$, so che
$\varphi(0) = G_i(x) = 0$, e so che $\varphi'(t) = \nabla G_i(x + t\hat{\nu}) \cdot \hat{\nu}(x)$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = \nabla G_i(x) \cdot \hat{\nu}(x) = \frac{\nabla G_i(x) \cdot \nabla G_i(x)}{\|\nabla G_i(x)\|} = \underbrace{\|\nabla G_i(x)\|}_{>0}$$

Dunque $(\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0) \Rightarrow \varphi(t) > 0$ per $t > 0$ piccolo.
In altri termini $G_i(x + t\hat{\nu}(x)) > 0$ se $t > 0$ e piccolo
e cioè $x + t\hat{\nu}(x) \notin D$ se $t > 0$ piccolo



È FONDAMENTALE LA CONVENZIONE PER CUI
$D = \{G_1 \le 0 \cdots G_M \le 0\}$

<u>PROBLEMA</u> Se D è un dominio regolare a tratti,
Ω aperto $D \subset \Omega$ e $G_1 \cdots G_M : \Omega \to \mathbb{R}$ definenti;
se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è C^1 COME TROVO i max/min (locali) di f su D ??

è chiaro che se i pti di max/min $\in \mathring{D} = \{G_1 < 0 \cdots G_M < 0\}$
avrei $\nabla f(x) = 0$

E se invece $x \in \partial D$?? DOVRÒ ANDARE A VEDERE QUALI G_i si annullano in x

IN EFFETTI:

Se $x_0 \in \partial D$, x è di max/min locale per f su D, allora, detti $i_1 \dots i_h$ gli indici per cui $G_{i_1}(x_0) = \dots G_{i_h}(x_0) = c$, esistono $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_h} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_{i_1} \nabla G_{i_1}(x_0) + \dots + \lambda_{i_h} \nabla G_{i_h}(x_0)$$

PER ESEMPIO se $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è punto di max/min rel per f su D

ALLORA CI SONO VARI CASI.

(0) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$ (NESSUNA EGUAGLIANZA)

$$\nabla f(P_0) = 0$$

(1) (1 eguaglianza) 4 sottocasi: (guardo le "facce" di D)

(1 A) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f(P_0) = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$$

(1 B) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f(P_0) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1 C) si annulla y

(1 D) si annulla z

... simili a (1 B)

(2) due eguaglianze. 6 sottocasi (guardo "gli spigoli")

(2 A) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ $x_0 = 0$ $y_0 > 0$ $z_0 > 0$

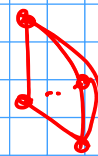
$$\nabla f(P_0) = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

....

(3) tre eguaglianze 4 sottocasi (vertici di D)

AVREI TRE MOLTIPLICATORI.

MA DATO che siamo in $\mathbb{R}^3$



qualunque vettore si scrive come comb. lineare di tre vettori lin indip.

DUNQUE I QUATTRO VERTICI SONO TUTTI PUNTI DA ESAMINARE

(4) quattro eguaglianze NON CI SONO CASI per l'ipotesi N.T. dato che non ci sono 4 vett. lin. indip. in $\mathbb{R}^3$