Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 02/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ω aperto, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $K<N$

$V \subset \Omega$ è un vincolo regolare bilatero di codimensione K in Ω se esiste una "funzione definente" $G : \Omega \to \mathbb{R}^K$ tale che

- $V = \{ x \in \Omega : G(x) = 0 \}$
- (★) $\forall x \in V$ $\quad J_G(x)$ ha rango K

$$\Updownarrow$$

$\forall x \in V$ $\quad \nabla G_1(x) \dots \nabla G_K(x)$ sono lin. indip

(G_i sono le componenti di G)

<u>Teorema</u> Se V è come sopra e $x \in V$, allora

$$\vec{v} \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ è tangente a } V \text{ in } x \iff J_G(x)\vec{v} = 0$$

$$\iff \nabla G_1(x) \cdot \vec{v} = \dots = \nabla G_K(x) \cdot \vec{v} = 0$$

Dunque l'insieme delle direzioni tangenti (a x in V) è uno spazio lineare che indico con $T_x(V)$ e si ha

$$T_x(V) = \underbrace{\text{span}\{\nabla G_1(x), \dots, \nabla G_K(x)\}}_{=: N_x(V)}{}^{\perp}$$

VISTA NELL' ULTIMA LEZIONE.

ORA CONSIDERO $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $V \subset \Omega$ vincolo reg. di codimensione K, $G : \Omega \to \mathbb{R}^K$ definente per V.

CONSIDERO ANCHE $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Teorema Se $x_0 \in V$ è punto di max/min locale per f su V

(cioè $\exists\, r>0$ tale che $\begin{matrix} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{matrix}$ $\forall x \in V$, $\|x-x_0\| < r$)

allora $\exists\, \lambda_1 .. \lambda_K \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + .. + \lambda_K \nabla G_K(x_0) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \nabla G_i(x_0)$$

In altri termini $\nabla f(x_0) \in N_x(V) \ (=: T_x(V)^\perp)$

$\lambda_1 .. \lambda_K$ SONO DETTI "MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE"

Dim ABBIAMO VISTO UN TEOREMA DI Fermat generale:

se x_0 è pto di max/min loc. per f su V $\Rightarrow$

$\nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v}$ tangente a V in x_0

Dato che V è regolare $\Rightarrow$ $\vec{v}$ è tangente a V in x_0 $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \cdot \nabla G_i(x_0) = 0 \quad \forall i = 1 .. K$

DUNQUE $\nabla f(x_0)$ è ortogonale a $T_x(V) = (N_{x_0}(V))^\perp$

$\Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}(V) = \operatorname{span}(\nabla G_i(x_0) \ \ i = 1 .. K)$ #

(è sempre vero che $(X^\perp)^\perp = X$ se $X \subset \mathbb{R}^N$ sottospazio)

ESEMPIO Cerco max/min di $f(x,y) = xy$ su $S = \{x^2+y^2=1\}$ NOTA: S è compatto, f è continua $\Rightarrow$ $\exists$ max/min di f su S. Per trovare questi max/min cerco i punti $P=(x,y)$ in cui $\nabla f(P) = \lambda \nabla G(P)$

DOVE $G(x,y) = x^2+y^2-1$ (che è una funzione definente per S)

Dovrei verificare che $\nabla G(P) \neq 0$ se $G(P)=0$ - IN QUESTO CASO $K=1$, S è di codimensione 1 (e di dimensione 1), LA CONDIZIONE (☆) si riduce a $\nabla G(P) \neq 0$ se $G(P)=0$

IN QUESTO CASO $J_G = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right] = [2x, 2y]$

(il gradiente è $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$). Dunque mi serve che

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ <u>VERA</u> se infatti fosse

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)=(0,0) \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \neq 1 \,.$$

DUNQUE per trovare max/min di $f=xy$ su S devo studiare

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \nabla G = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$
(su S)

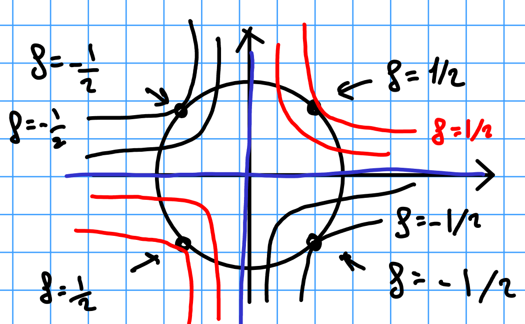
$$\left.\begin{cases} -2\lambda x + y = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \neq (0,0) \text{ - NON VERIFICA } x^2+y^2=1 \\ \det \begin{bmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff 4\lambda^2 = 1 \iff 2\lambda = \pm 1 \end{cases}$$
$x^2+y^2=1$

$$2\lambda = 1 \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = x \\ y = x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = \pm\sqrt{2}/2 \; (=x) \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2\lambda = -1 \begin{cases} \lambda = -1/2 \\ y = -x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \cdots \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ALLA FINE TRO 4 PUNTI "STAZIONARI" $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{x^2+y^2=1} xy = \frac{1}{2}, \quad \min_{x^2+y^2=1} xy = -\frac{1}{2}$$

DEF. Se un punto x_0 verifica:
$$\nabla f(x_0) \in \mathrm{span}\{\nabla G_1(x_0) \cdots \nabla G_k(x_0)\}$$
dirò che x_0 è un punto critico / stazionario per f su V

"CODIMENSIONE 0"

NOTA Se $x_0 \in \Omega$, NON C'È NESSUNA G, e condizione diventa $\nabla f(x_0) = 0$

ESERCIZIO $f(x,y,z) = xyz$
$$V = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\quad x-y+z = 0\}$$
Cerco max/min di f su V. In questo caso posso prendere
$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x-y+z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} G_1(x,y,z) \\ G_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$
Vediamo che G è definente. È chiaro che $V = \{G = 0\}$

Rimane da verificare la condizione $(\star)$ cioè
$$J_G(x,y,z) \text{ ha rango } 2 \text{ se } G(x,y,z) = 0$$
$$J_G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Supponiamo (per assurdo) che ci sia una terna (x,y,z) tale che
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x-y+z = 0 \\ -2x-2y = 0 & (\text{MINORE } 1,2) \iff y = -x \\ 2x-2z = 0 & (\text{MINORE } (1,3)) \iff z = x \\ 2y+2z = 0 & (\text{MINORE } (2,3)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 1 \\ 3x = 0 \end{cases} \text{ IMPOSSIBILE}$$
DUNQUE $\underline{G \text{ è definente}}$

Se allora (x,y,z) è pto di max/min locale per f su $V \Rightarrow$
$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
$$\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 \quad (\text{in } (x,y,z))$$
CIOÈ:

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y - \mu \\ xy = 2\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CONTINUA ..