Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 28 26/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (o del DINI)

($N, M \in \mathbb{N}$. I punti di $\mathbb{R}^{N+M}$ si possono vedere come coppie (x,y) dove $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$. Analogamente se $G: \mathbb{R}^{N+M} \to X \Rightarrow$ posso scrivere $G(x,y)$)

INGREDIENTI

Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+M}$, $G: \Omega \to \mathbb{R}^M$ di classe C^1

e considero l'insieme

$$V = \{(x,y) \in \Omega : G(x,y) = 0\}$$

ESEMPI S = circonferenza unitaria: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2-1}_{G(x,y)} = 0\}$

$N=1 \quad M=1$

V = sfera unitaria $V = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{G((x,y),\, z)} = 0\}$

$N=2 \quad M=1$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$

Dato che abbiamo diviso le variabili di Ω "in due gruppi" INDICHIAMO

$\frac{\partial G}{\partial x}(p) :=$ MATRICE Jacobiana rispetto alle variabili x

$\frac{\partial G}{\partial y}(p) =$ MATRICE Jacobiana rispetto alle variabili y

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_N}(x,y) \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_1}(x,y) & & \frac{\partial G_M}{\partial x_N}(x,y) \end{bmatrix} \quad (\text{è } M \times N)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_M}(x,y) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_M}{\partial y_M}(x,y) & \dots & \frac{\partial G_M}{\partial y_M}(x,y) \end{bmatrix} \quad (\text{è } M \times M)$$

QUADRATA

DUNQUE $J_G(x,y) = \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \,\middle|\, \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right]$ (è $(N+M) \times M$)

IPOTESI ABBIAMO UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0)$ tale che

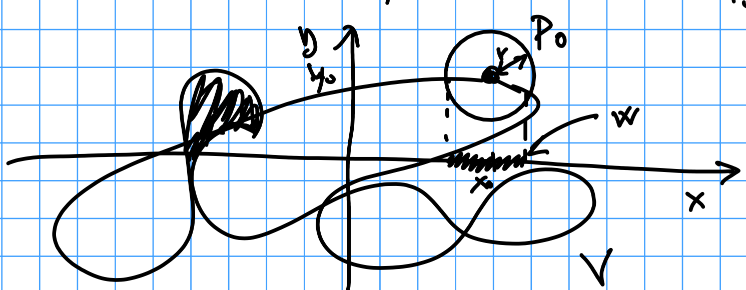
$G(P_0) = 0_M = \underbrace{(0 \dots 0)}_{M}$ $\quad (P_0 \in V)$ e inoltre

(D) $\quad \det\left(\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)\right) \neq 0$

TESI Esistono $r > 0$, $\exists$ W aperto di $\mathbb{R}^N$ che contiene x_0, esiste $g : W \to \mathbb{R}^M$ tali che

$V \cap B(P_0, r) = \{(x, g(x)) : x \in W\}$

$\boxed{\text{+ ... VEDIAMO DOPO}}$

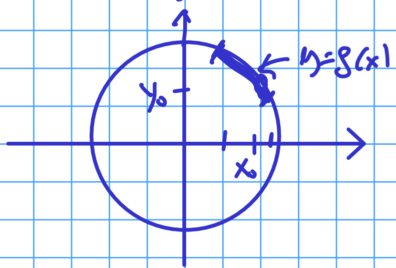


($V \cap B(P_0, r)$ è il grafico di $g : W \to \mathbb{R}^M$

possono ricavare le y in funzione delle x)

CASO DELLA CIRCONFERENZA: $\Omega = \mathbb{R}^2$ $\quad G(x,y) = x^2+y^2-1$

$V = \{x^2+y^2=1\}$. Se $(x_0,y_0)\in V$ tale che



$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 \iff 2y_0 \neq 0 \iff y_0 \neq 0$$

Allora vicino a x_0 V è grafico di una funzione $y = f(x)$

IN EFFETTI $f = \sqrt{1-x^2}$ se $y_0 > 0$

$f = -\sqrt{1-x^2}$ se $y_0 < 0$

DIM. È basato sul teorema di inversione locale.

Definiamo $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^{N+M}$ ponendo

$$\Phi(x,y) = (\underbrace{x}_{N}, \underbrace{G(x,y)}_{M}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ G_1(x,y) \\ G_M(x,y) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana di G in P_0

$$J_\Phi(P) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} I_N & 0 \\ \hline \frac{\partial G}{\partial x}(P) & \frac{\partial G}{\partial y}(P) \end{array}\right] & \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \\ \begin{array}{cc} N \quad & \quad M \end{array} & \end{array} \qquad I_N = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{N} \Big\} N$$

$$\det J_\Phi(P) = \overset{=1}{\det(I_N)} \cdot \det\left(\frac{\partial G}{\partial y}(P)\right) \qquad \text{(ci fidiamo)}$$

$$\left(\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det C\right)$$

$\neq 0$ nel punto P_0

Dunque $\boxed{\det J_\Phi(P_0) \neq 0}$ $\to$ (th. di inv. locale)

esiste $r > 0$:

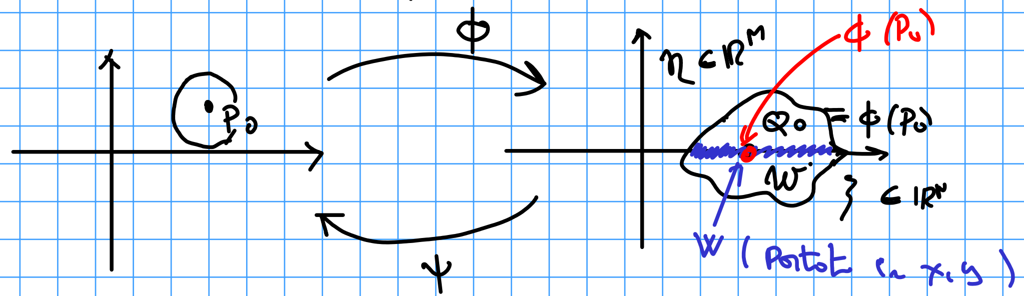
- Φ è iniettiva su $B(P_0, r)$
- $W := \Phi(B(P_0,r))$ è un aperto di $\mathbb{R}^{N+M}$

$\underline{\underline{\Psi := \Phi^{-1}}} : \mathcal{W} \to B(P_0, r)$ è C^1 e si ha

$$J_\psi(Q) = \left(J_\phi(P)\right)^{-1} \quad \text{dove } Q = \phi(P) \quad \forall P \in B(P_0, r)$$

$$\Updownarrow$$

$$J_\psi(Q) = \left(J_\phi(\psi(Q))\right)^{-1} \quad \forall Q \in \mathcal{W}$$



Per andare avanti possiamo dire qualcosa su com'è fatta $\psi := \phi^{-1}$. $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ $\quad \psi_1 : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^N \quad \psi_2 : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^M$

So che $\quad \psi(\phi(x,y)) = (x,y) \qquad \left(\phi(x,y) = (x, G(x,y))\right)$ $\otimes$

$$\phi(\psi(\xi,\eta)) = (\xi,\eta)$$

$$\underbrace{\left(\psi_1(\xi,\eta), G(\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta))\right)}_{\otimes} = \phi(\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta)) = (\xi,\eta)$$

$\Updownarrow$ eguagliando componente per componente

$$\psi_1(\xi,\eta) = \xi$$
$$G(\xi, \psi_2(\xi,\eta)) = \eta \qquad \star$$

è la f che cerco

DUNQUE se FISSO $M=0$ vedo che $\psi_2(\xi, M) \in V$ per ogni ξ

- Definiamo $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^N : (x,0) \in \mathcal{W}\}$. Si dimostra facilmente che $\mathcal{V}$ è un aperto di $\mathbb{R}^N$.
- Dico che $x_0 \in \mathcal{V}$ infatti se prendo $P_0 = (x_0, y_0)$ $\Rightarrow \phi(P_0) \in \mathcal{W}$. Ma $\phi(P_0) = (x_0, G(P_0)) = (x_0, 0)$ cioè $x_0 \in \mathcal{V}$ per come ho definito $\mathcal{V}$.
- Se $x \in \mathcal{V}$ definisco $f(x) := \psi_2(x, 0)$ (che si può fare dato che $(x,0) \in \mathcal{W}$)

ALLORA

(1) Sia $P=(x,y) \in V \cap B(P_0,r)$, cioè
$P \in B(P_0,r)$ e $G(P)=0 \Rightarrow$
$\phi(P) = (x,0) \in W \Rightarrow x \in W$

Ma io so che $(x,y) = \psi(x,0) = (\psi_1(x,0), \psi_2(x,0))$
$\Rightarrow y = \psi_2(x,0) = f(x)$

Ho dimostrato che, se $(x,y) \in V \cap B(P_0,r) \Rightarrow x \in W$ e $y = f(x)$

(2) Supponiamo che $x \in W$ e $y = f(x)$. Allora

$G(x,y) = G(x,f(x)) = G(x, \psi_2(x,0)) = 0$ per
quanto visto prima ☆

DUNQUE se $x \in W$, $y = f(x) \Rightarrow (x,y) \in V$
e si vede che $(x,y) \in B(P_0,r)$

FINITO DI DIMOSTRARE LA TESI

IN REALTÀ IL TEOREMA DICE ANCHE qualcosa sulle derivate di f.

TESI (II°) La $f : W \to \mathbb{R}^M$ trovata sopra è
di classe C^1 e si ha:

$$\underbrace{Jf(x)}_{M \times N} = \underbrace{\left(\frac{\partial G(x,f(x))}{\partial y} \right)^{-1}}_{M \times M} \underbrace{\frac{\partial G(x,f(x))}{\partial x}}_{M \times N} \quad \forall x \in W$$

IDEA DI DIM. Abbiamo detto che $f(x) = \psi_2(x,0)$.
Se guardiamo come è definita ψ sappiamo dal teorema
di inversione locale che

(*) $J\psi(Q) = J\phi(P)^{-1}$ $P = \psi(Q)$

Ricordiamo che $J\phi(P) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial G}{\partial x}(P) & \frac{\partial G}{\partial y}(P) \end{array}\right]$ $\rightsquigarrow$ si vede

$$J\psi(Q) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline A\,?? & \frac{\partial G}{\partial y}^{-1}(P) \end{array}\right]$$

cosa devo mettere qui ??

Mi ricordo la (*)

Dal fatto che $J\psi(Q)\,J\phi(P) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & \frac{\partial G}{\partial y}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \underbrace{A + \frac{\partial G}{\partial y}^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}}_{\text{VOGLIO ZERO}} & I \end{bmatrix}$$

$$A = -\frac{\partial G}{\partial y}(P)^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}(P)$$

DUNQUE $J\psi(Q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{\partial G}{\partial y}(P)^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}(P) & \frac{\partial G}{\partial y}(P)^{-1} \end{bmatrix}$

A me serve " $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ " che corrisponde a $\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x,0)$

che mi dà proprio la formula richiesta:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ J_g f(x)}}{\frac{\partial f}{\partial x}(x)} = \frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))^{-1}\frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))$$

$\boxed{\text{OK PER OGGI}}$