Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 27 25/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEOREMA (di inversione locale)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (lo stesso N !!), f di classe C^1

$x_0 \in \Omega$ e chiamo $y_0 := f(x_0)$.

SUPPONIAMO

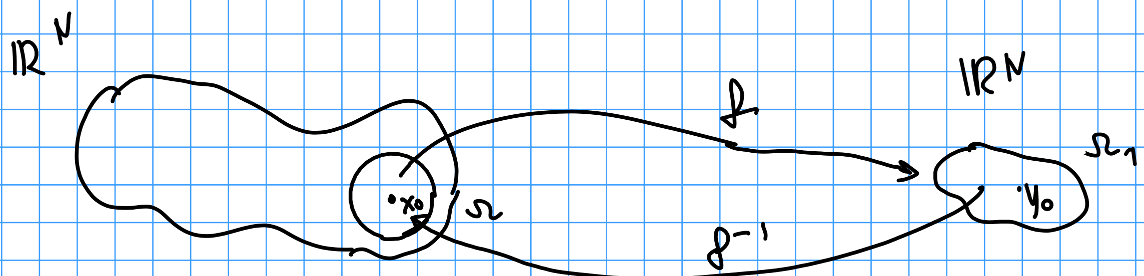
$$\det\left(J_f(x_0)\right) \neq 0$$

(N.B. $J_f(x)$ è quadrato (!) dato che è $N \times N$)) Dunque $J_f(x_0)$ è una matrice invertibile.

TESI Allora esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset \Omega$ e

(1) f è iniettiva in $B(x_0, r)$

(2) $f(B(x_0, r))$ è un aperto Ω_1 di $\mathbb{R}^N$



(3) Inoltre la funzione f^{-1} che è ben definita da $\Omega_1 \to B(x_0, r)$ è differenziabile in tutte le $y \in \Omega_1$ e vale la formula

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1} \qquad \text{dove } f(x) = y$$

$$\Updownarrow$$

(☆)

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(f^{-1}(y))^{-1} \qquad (\forall y \in \Omega_1)$$

(N.B. Se $N=1$ ritrovo la vecchia formula:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dove } f(x) = y$$
)

La dim è complessa e la omettiamo. DISCUTIAMO SOLO, PER UN MOMENTO LA FORMULA (☆).

Se diamo per buone la (1) e la (2) e anche il fatto che f^{-1} è differenziabile $\Rightarrow$ la formula è conseguenza dei teoremi visti. Infatti:

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in B(x_0, r)$$

In altri termini:

$$f^{-1} \circ f = id \qquad (id(x) = x \quad \forall x)$$

Per la regola di derivazione della composizione si ha

$$J_{id}(x) = J_{f^{-1}}(f(x))\, J_f(x) \qquad \text{Ma } J_{id}(x) = I_N = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I_N = J_{f^{-1}}(f(x))\, J_f(x) \qquad (A)$$

ANALOGAMENTE, se parto da $f(f^{-1}(y)) = y$ ottengo

$$I_N = J_f(f^{-1}(y))\, J_{f^{-1}}(y) \qquad (B)$$

$$(A)+(B) \iff J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1} \qquad (y=f(x))$$

che è proprio la formula (★)

IL TEOREMA È "LOCALE", ci dice che f^{-1} esiste solo VICINO a $y_0 = f(x_0)$

Non posso dire che f^{-1} esiste su tutto $f(\Omega)$, anche ammesso che $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$

IN REALTÀ AVEVAMO GIÀ VISTO CHE la funzione

$$\boxed{f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}}$$

da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

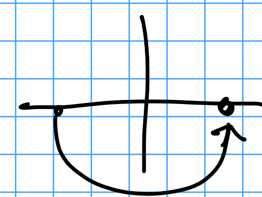
(se scrivo $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Rightarrow$

$$f(x,y) = (\rho^2\cos(2\theta), \rho^2\sin 2\theta)$$

da cui vedo che f NON È INIETTIVA:

$$(1,0) = f(1,0) = f(-1,0)$$

$\rho=1 \quad \theta=0 \qquad\qquad \rho=1 \quad \theta=\pi$



VEDIAMO COSA CI DICE IL TEOREMA NEL CASO DI f come sopra. Calcoliamo $J_f(x,y)$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

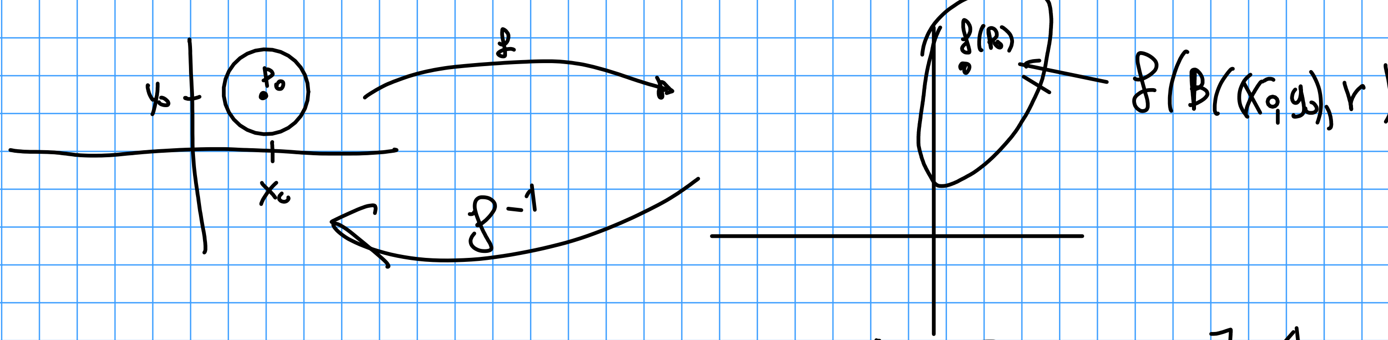
Vedo che $\det J_f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 \neq 0$ eccetto che in $(0,0)$

Se applico il teorema a questa f OTTENGO:

$\forall (x_0,y_0) \neq (0,0)$ la f è invertibile VICINO A (x_0,y_0)

CIOÈ $\exists\, \rho > 0$ per cui f è invertibile su

$$B((x_0,y_0),r) = \{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \}$$



INOLTRE $\quad J_{f^{-1}}(f(x_0,y_0)) = J_f(x_0,y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{bmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{\det J_f}\begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ -2y_0 & 2x_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4(x_0^2+y_0^2)}\begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ -2y_0 & 2x_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} & \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} \\ -\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} & \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \end{bmatrix} = J_{f^{-1}}(f(x_0,y_0))$$

Per rendere esplicita la formula DEVO CALCOLARE f^{-1}

IN REALTÀ ABBIAMO GIÀ FATTO QUESTO CALCOLO (lezione 22/10 n. 12) e abbiamo visto che

se $\quad f(x,y)=(\xi,\eta) \iff \begin{cases} x^2-y^2=\xi \\ 2xy=\eta \end{cases} \Rightarrow$

>0 (se $\eta>0$)

(**)

f NON È INIETTIVA DATO CHE C'È $\pm$ $\rightarrow$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}}, \quad y = \pm\,\mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}}$$

(se $\eta \neq 0$; se $\eta = 0 \Rightarrow$ . . . .)

VEDIAMO "LOCALMENTE"

Prendiamo per esempio $x>0$, $y>0$. SE $\Omega := \{x>0, y>0\}$

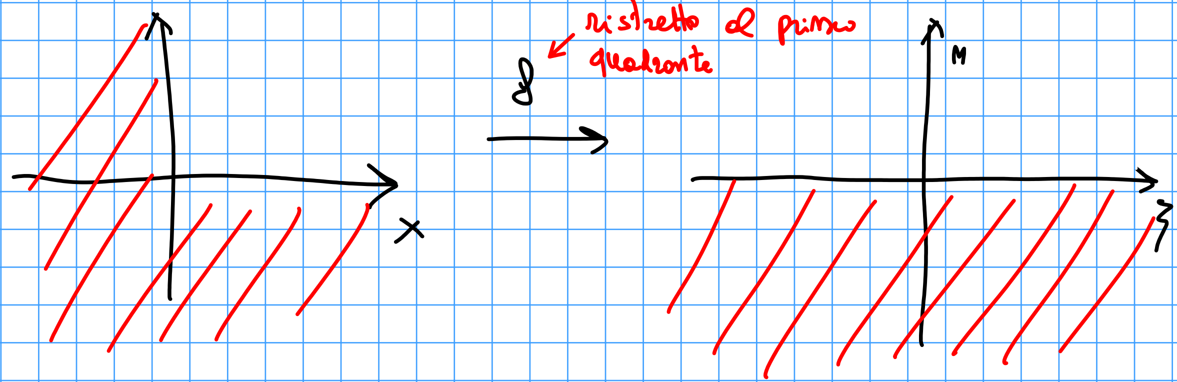
$f(\Omega) = ??$. Devo vedere quali coppie (ξ,η) sono $f(x,y)$ per $x>0$ e $y>0$. Dall'espressione di f ho

$\begin{cases} x^2-y^2=\xi \\ 2xy=\eta \quad \Rightarrow \boxed{\eta>0} \end{cases} \Rightarrow f(\Omega) \subset \{(\xi,\eta) : \eta>0\}$

Viceversa se $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ e $\eta>0$ nella formula di prima ho $\mathrm{sgn}(\eta)>0 \Rightarrow$ se scelgo il segno $+$

trovo $x>0$ e $y>0$ (qualunque sia ξ)

IN DEFINITIVA $g(\Omega)=\{(\xi,\eta):\ \eta>0\}$



IN QUESTO CASO HO

$$\boxed{g^{-1}(\xi,\eta)=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\ \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right)}$$

CONTINUA IL 26/11

Calcoliamo $J_{g^{-1}}(\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}=\frac{1}{\sqrt2}\,\frac{\frac{\cancel{2}\xi}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+1}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}}=\frac{1}{\sqrt2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=$$

$$\boxed{\frac{\sqrt2}{4}\,\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}=J_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}=\frac{\frac{\cancel{2}\eta}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+0}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}}=\boxed{\frac{\sqrt2}{4}\,\frac{\eta}{\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}=J_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}=\frac{\frac{\cancel{2}\xi}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}-1}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}=\frac{\xi-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$=\boxed{-\frac{\sqrt2}{4}\,\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}=J_{21}$$

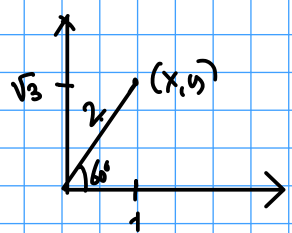
J_{22} ↓

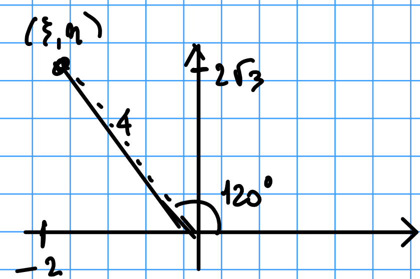
$$\frac{\partial}{\partial \eta}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi} = \frac{\dfrac{2\eta}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\eta}{\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}$$

$$J_{g^{-1}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

PRENDIAMO PER ESEMPIO $(x,y) = (1, \sqrt{3})$

$$\Rightarrow (\xi,\eta) = g(x,y) = g(2,\sqrt{3}) = (-2, 2\sqrt{3})$$





$$\left(\|\xi,\eta\| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \right)$$

VERIFICA
$$g^{-1}(\xi,\eta) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{16}-2}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{16}+2}{2}} \right) =$$
$$(1, \sqrt{3}) \leftarrow \underline{\text{TORNA}}$$

Dunque
$$J_{g^{-1}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} & \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\eta}{\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} & \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\eta}{\left(\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$J_{g^{-1}}(-2, 2\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{4-2}}{4}, & \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4-2}\;4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{4+2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+2}\;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

CONFRONTIAMO QUESTO RISULTATO CON QUANTO PREVISTO DALLA FORMULA

Mi serve $J_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow J_g(1,\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$

SE LA FORMULA È VERA DEVE ESSERE $J_g(1,\sqrt{3})^{-1} = J_{g^{-1}}(-2, 2\sqrt{3})$

(calcolando l'inverso dell'ultimo match devo trovare quello precedente.)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\;)} \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$\det(\circ) = 4 + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 16$

TORNA