Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26 20/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Concludiamo l'es di ieri:

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - xy - e^{xy}$$

VISTO CHE CI SONO TRE PUNTI CRITICI: $(0,0)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}\sqrt{c}\right)$

dove $c = \ln(4\sqrt{2}-1)$.

VOGLIO CAPIRE LA NATURA DI QUESTI PUNTI. GIÀ CALCOLATO LE DER. II° $\Rightarrow$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 8 - y^2 e^{xy} & -1 - e^{xy} - xy e^{xy} \\ -1 - e^{xy} - xy e^{xy} & 4 - x^2 e^{xy} \end{bmatrix}$$

IN $(0,0)$ $\quad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ ho det. $= 32 - 4 = 28 > 0$, $a_{11} = 8 > 0$

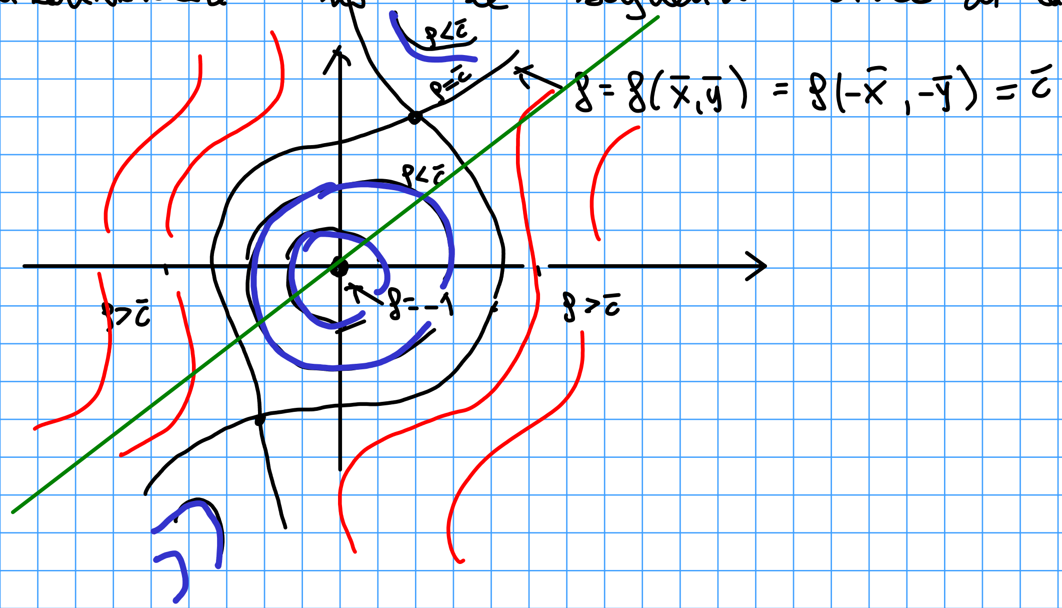
$\Rightarrow (0,0)$ pto di min. locale

IN $\pm\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}\sqrt{c}\right) = (\bar{x}, \bar{y})$ trovo $Hf = \begin{bmatrix} 8 - \sqrt{2}\,c\,(4\sqrt{2}-1) & -2-4\sqrt{2} - c(4\sqrt{2}-1) \\ -2-4\sqrt{2}-c(4\sqrt{2}-1) & 4 - \frac{c}{\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-1) \end{bmatrix}$

$xy = c \Rightarrow e^c = 4\sqrt{2} - 1$.

Se si prendono questi numeri e si calcola il determinante si vede che viene $< 0 \Rightarrow$ questi sono due punti di sella

Qualitativamente ho le seguenti linee di livello :



Se guardo f mi accorgo che $\lim_{|x|\to\infty} f(x,x) =$

$$\lim_{|x|\to\infty} 4x^2 + 2x^2 - x^2 - e^{x^2} = -\infty$$

sulla diagonale principale finisco nella zona blu!!

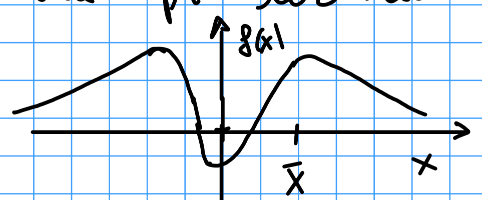
HO TROVATO UNA DIREZIONE IN CUI $\boxed{f \to -\infty}$ $(x|D| \to \infty)$

Se invece prendo $y=0$ e faccio

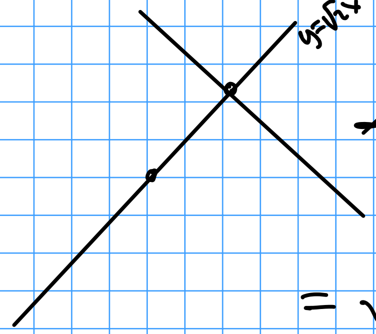
$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,0) = \lim_{|x|\to\infty} 4x^2 - 1 = +\infty$$

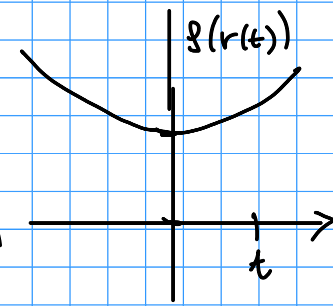
HO TROVATO UNA DIREZIONE IN CUI $\boxed{f \to +\infty}$

OSS. Se mi metto sulla retta $y = \sqrt{2}x$ (quella che contiene i due pti stazionari) vedo il seguente grafico



Se mi metto sulla retta $r(t)=(\bar{x},\bar{y})+t\,\vec{w}$ con $\vec{w}\perp\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$





NÉ MAX NÉ MIN ASSOLUTI

= vedo (probabilmente)

$$f(x,y)=2(1+2x+y)\,e^{1+2xy}$$

VOGLIO TROVARE $P_{3,(-1,1)}$ (polinomio di ordine 3, centrato in $P_0=(-1,1)$)

(e poi, trovato il polinomio, cerchiamo

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(-1,1)=\boxed{}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(-1,1)=\boxed{}$$

<u>Svolgimento</u> CONVIENE RIPORTARSI A $(0,0)$ cioè

Poniamo $g(x,y)=f(-1+x,\,1+y)$ e cerchiamo il pol. $P_{3,(0,0)}$ di g. Vediamo cosa è $g(x,y)$ =

$\left(D_\alpha g(x,y) = D_\alpha f(-1+x,1+y)\right)$

$$g(x,y)=2(1+2(-1+x)+(1+y))\,e^{1+2(-1+x)(1+y)}=$$
$$2(\cancel{1}-\cancel{2}+2x+\cancel{1}+y)\,e^{1+2(-1-y+x+xy)}=$$
$$2(2x+y)\,e^{-1-2y+2x+2xy}=$$
$$\frac{2}{e}(2x+y)\,e^{-2y+2x+2xy}$$

← VOGLIO P_3 di g in $(0,0)$

Parto da $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ (vedremo che basta l'ordine 2)

$P=(x,y)$

$$e^{-2y+2x+2xy}=1-2y+2x+\underbrace{2xy}_{O(\|P\|^2)}+\frac{1}{2}(\underbrace{-2y+2x+O(\|P\|^2)}_{O(\|P\|)})^2+o\left(O(\|\ \|)^2\right)$$

⊗

$$= 1 - 2y + 2x + 2xy + \frac{1}{2}\left(4y^2 + 4x^2 - 8xy\right) + o(\|P\|^2)$$

$(*) =$

	$-2y$	$+2x$	$+\,O(\|P\|^2)$
$-2y$	$4y^2$	$-4xy$	
$+2x$	$-4xy$		
$O(\|P\|^2)$		tutti $o(\|P\|^2)$	

Devo moltiplicare per $\frac{2}{e}(2x+y) \Rightarrow$

$$g(x,y) = \frac{2}{e}(2x+y)\left(1 - 2y + 2x + 2y^2 + 2x^2 - 2xy + o(\|P\|^2)\right) =$$

$$\frac{2}{e}\Big(2x - 4xy + 4x^2 + 4xy^2 + 4x^3 - \cancel{2x^2y} + y - 2y^2 + 2xy + 2y^3 + \cancel{2x^2y} - 2xy^2 + o(\|P\|^3)$$

$$= \frac{2}{e}\Big(2x + y + 4x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x^3 + 2y^3 + 2xy^2 + o(\|P\|^3)\Big)$$

PARENTESI

Dico che $f = o(g)$ se $\frac{f}{g} \to 0$ (in un certo punto fissato)

$f = O(g)$ se $\left|\frac{f}{g}\right| \leq$ costante

(per esempio se $\frac{f}{g} \to l$ e finito)

Dato che $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |x| = O(\|(x,y)\|)$

Proprietà

$o(O(g)) = o(g)$

$o(O(g)^k) = o(g^k)$

$o(g_1)\,o(g_2) = o(g_1 g_2)$

$O(g_1)\,O(g_2) = O(g_1 g_2)$

$O(g_1)\,o(g_2) = o(g_1 g_2)$

$$g(x,y) = \frac{2}{e}\Big(2x + y + 4x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x^3 + 2y^3 + 2xy^2 + o(\|P\|^3)\Big)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(x,y) = \frac{2}{e}\Big(2(x+1) + (y-1) + 4(x+1)^2 - 2(y-1)^2 - 2(x+1)(y-1) + 4(x+1)^3$$
$$+ 2(y-1)^3 + 2(x+1)(y-1)^2 + o(\|P - P_0\|^2)\Big) \qquad (P_0 = (-1,2))$$

HO TROVATO IL POLINOMIO IN P_0

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(-1,1) = \boxed{24 \cdot \frac{2}{e}}$$

$\alpha = (3,0) \to$ termine di $(x+1)^3$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(-1,1) = \boxed{4 \cdot \frac{2}{e}}$$

$\alpha = (1,2) \to$ termine $(x+1)(y-1)^2$

$\to$ coefficiente 2

$$\underbrace{\frac{1}{(3,0)!}}_{\frac{1}{6}} \frac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x^3} = \text{coefficiente di } (x+1)^3 \underline{\underline{= 4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(-1,1) = 24$$

$$\frac{1}{(1,2)!} \frac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x \partial y^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(-1,1) = 4$$

SALVO ERRORI DI CALCOLO

Dato α multiindice $\Rightarrow$

il coeff. c_α nel pol. di Taylor relativo al monomio P^α è

$$\frac{D_\alpha f(P_0)}{\alpha!} \iff D_\alpha f(P_0) = \alpha! \, c_\alpha$$

ESERCIZIO

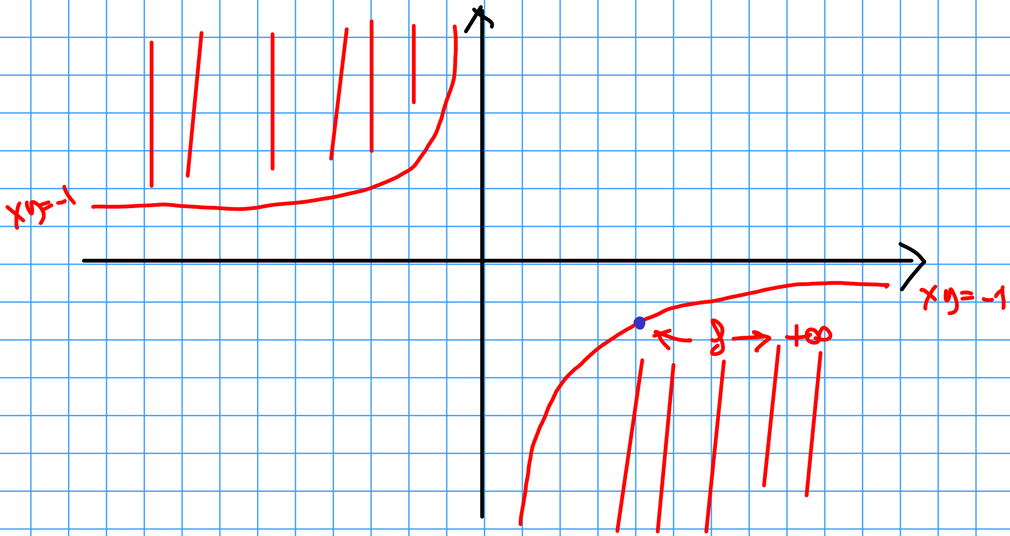
$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2 \ln(1+xy)$$

N.B. $\varphi(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy$ è una forma quadratica ed è associata alla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = 4 - \frac{9}{4} > 0$. Dunque $A > 0$

DUNQUE f è somma di una forma quadratica def. >0 + $\ln(1+xy)$.

DOMINIO DI f Deve essere $1 + xy > 0 \iff xy > -1$



OSS. ① Se (x_0,y_0) è tale che $x_0 y_0 = -1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

(perché in f c'è $-\ln(1+xy)$)

② Se $\|(x,y)\| \to +\infty \Rightarrow f(x,y) \to +\infty$? ?

Posso usare la disuguaglianza $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ $\left((x-y)^2 \geq 0\right)$

$\Rightarrow 1 + xy \leq 1 + \frac{\|(x,y)\|^2}{2}$

$\Rightarrow \ln(1+xy) \leq \ln\left(1 + \frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right)$ $P=(x,y)$

$\Rightarrow -\ln(1+xy) \geq -\ln\left(1+\frac{\|P\|^2}{2}\right)$

$\Rightarrow f(P) \geq \varphi(P) - 2\ln\left(1+\frac{\|P\|^2}{2}\right) \geq$

$\nu\|P\|^2 - 2\ln\left(1+\frac{\|P\|^2}{2}\right)$

($\nu > 0$ è tale che $\varphi(P) \geq \nu\|P\|^2$ che esiste perché la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} > 0$)

Dato che $\lim_{t\to\infty} \nu t^2 - 2\ln(1+t^2/2) = +\infty$

ottengo che $\lim_{\|P\|\to\infty} f(P) = +\infty$

Mettendo insieme (1) e (2) ottengo che $\boxed{f \text{ HA MINIMO}}$

(Weierstrass generalizzato)

• Cerchiamo i pti critici (e poi li classifichiamo)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y - \frac{2y}{1+xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3x - \frac{2x}{1+xy}$$

Se eguaglio a zero trovo il sistema:

$$\begin{cases} 4x - \left(3 + \frac{2}{1+xy}\right) y = 0 \\ -\left(3+\frac{2}{1+xy}\right)x + 4y = 0 \end{cases}$$

Se (x,y) è soluzione, allora

- $(x,y) = 00$
- la matrice $\begin{bmatrix} 4 & -(3+2/1+xy) \\ -(3+2/1+xy & 4 \end{bmatrix}$ ha determinante nullo

La seconda condizione mi dà $\left(3+\frac{2}{1+xy}\right) = \pm 4$

Siccome $1+xy>0$ il meno non può esserci $\Rightarrow$ rimane $+$

Dunque, se $(x,y) \neq (0,0)$, ottengo le due condizioni

$$\begin{cases} x = y \\ 3+\frac{2}{1+xy} = 4 \end{cases}$$

(dal sistema con la condizione $\left(3+\frac{2}{1+xy} = 4\right)$)

$$\frac{2}{1+xy} = 1 \qquad 2 = 1+xy \qquad xy = 1$$

$$\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \text{TROVO } \pm(1,1)$$

TRE PTI CRITICI $\boxed{(0,0) \quad (1,1) \quad (-1,-1)}$

- Calcoliamo le derivate II

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y - \frac{2y}{1+xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3x - \frac{2x}{1+xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \frac{2y^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 + \frac{2x^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 - \frac{2(1+xy) - 2xy}{(1+xy)^2}$$

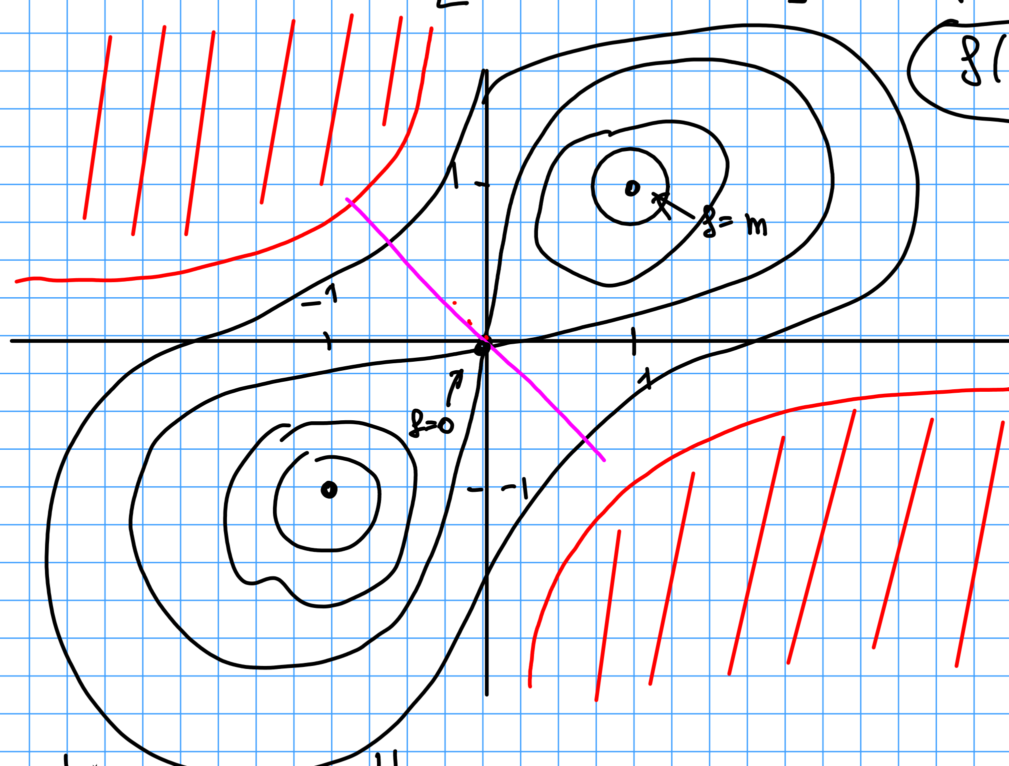
$$= -3 - \frac{2}{(1+xy)^2}$$

IN $(0,0)$ $\qquad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \det < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{pt di SELLA}}$

IN $\pm(1,1)$ $\qquad H_f = \begin{bmatrix} 4+1/2 & -3-\frac{1}{2} \\ -3-\frac{1}{2} & 4+1/2 \end{bmatrix}$ $\qquad \det > 0$ e $a_{11} > 0$

pto di minimo

$$\boxed{f(1,1) = 1 - 2\ln(2) = m}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{MIN } f = m = 1-2\ln(2) \\ \text{Dominio} \end{array}}$$