Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25 19/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

MATRICE HESSIANA E PUNTI CRITICI

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\Omega$ aperto $x_0 \in \Omega$

SUPPONIAMO $f$ di classe $C^2$ e che $\nabla f(x_0) = 0$
($x_0$ è un punto stazionario per $f$)

USANDO LA MATRICE $H_f(x_0)$ troveremo dei criteri per stabilire se $x_0$ è pto di max/min. rel - OPPURE "pto di sella"

TEOREMA (ci interessa relativamente
Se $x_0$ è punto di minimo relativo (massimo relativo) $\Rightarrow$

$H_f(x_0) \geq 0$ ( $H_f(x_0) \leq 0$ )

semidefinito positivo

semidefinito negativo

**Dim.** CASO DEL MINIMO. So che $\exists\, r>0$ tale che

$$\rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in B(x_0,r) \quad (\subset \Omega)$$

Usiamo lo sviluppo di Taylor di ordine 2:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x-x_0)\cdot(x-x_0) + R(x,x_0)$$

dove $\dfrac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x\to x_0} 0$.

Prendo $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ con $\|\vec{v}\|=1$ e scelgo $x = x_0 + t\vec{v}$ $\quad t\in[0,r[$

($\Rightarrow x_0+t\vec{v} \in B(x_0,r) \subset \Omega$). Dato che $\nabla f(x_0)=0 \Rightarrow$

$$\underbrace{0 \leq f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0)}_{x_0 \text{ è pto di minimo}} = \frac{t^2}{2}\left(H_f(x_0)\,\vec{v}\right)\vec{v} + R(x_0+t\vec{v},x_0)$$

Se divido per $\frac{t^2}{2}$ $(>0)$ ottengo:

$$\left(H_f(x_0)\vec{v}\right)\vec{v} + 2\,\frac{R(x_0+t\vec{v},x_0)}{t^2} \geq 0$$

$\|t\vec{v}\| = t$

$$\underbrace{\left(H_f(x_0)\vec{v}\right)\vec{v}}_{\text{NON DIPENDE DA } t} \geq -2\,\frac{R(x_0+t\vec{v},x_0)}{\|(x_0+t\vec{v})-x_0\|^2} \xrightarrow{\text{se } t\to 0\ (\text{perché } R=o(\|\ \|^2))} 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(H_f(x_0)\vec{v}\right)\vec{v} \geq 0 \qquad \forall \vec{v}\in\mathbb{R}^N \text{ con } \cancel{\|\vec{v}\|=1} \qquad \#$$

**TEOREMA** (che ci interessa)

Se $H_f(x_0) > 0$ $\quad (H_f(x_0) < 0) \Rightarrow$

$x_0$ è punto di minimo ($x_0$ è punto di massimo)

Dim. Uso di nuovo Taylor all'ordine 2 :

Dato $x \in \Omega$ posso scrivere

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\Big(Hf(x_0)(x-x_0)\Big)\cdot(x-x_0) + R(x,x_0)$$

So che $R(x,x_0) = o(\|x-x_0\|^2)$ per cui posso scrivere

$$R(x,x_0) = \sigma(x,x_0)\,\|x-x_0\|^2 \qquad \text{dove} \qquad \sigma(x,x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

$\left(\sigma = \frac{R}{\|\ \|^2}\right)$ DUNQUE

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\Big(Hf(x_0)(x-x_0)\Big)\cdot(x-x_0) + \sigma(x,x_0)\|x-x_0\|^2$$

Supponiamo che $H_f(x_0) > 0$. Abbiamo visto che allora deve esistere $\nu > 0$ per cui $\big(Hf(x_0)\vec{v}\big)\cdot\vec{v} \geq \nu\|\vec{v}\|^2$.

DUNQUE

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{\nu}{2}\|x-x_0\|^2 + \sigma(x,x_0)\|x-x_0\|^2 =$$

$$\left(\frac{\nu}{2} + \sigma(x,x_0)\right)\|x-x_0\|^2$$

e ci ricordiamo che $\sigma \to 0$ se $x \to x_0$. ALLORA

$$\frac{\nu}{2} + \sigma(x,x_0) \to \frac{\nu}{2} > 0 \quad \text{se} \quad x \to x_0$$

per i teoremi sui limiti $\exists\, r > 0$ tale che

$$\frac{\nu}{2} + \sigma(x,x_0) \geq \frac{\nu}{4} \qquad \forall x \in B(x_0,r)$$

e allora

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{\nu}{4}\|x-x_0\|^2 \qquad \forall x \in B(x_0,r)$$

Dunque $x_0$ è di minimo (STRETTO) in $B(x_0,r)$

#

Def. Supponiamo $Hf(x_0)$ ha $N$ autovalori reali $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$

(eventualmente ripetuti) — segue dal teorema spettrale ($H_f$ SIMMETRICA)

Se succede che esiste $1 < k < N$ per cui

$$\circledast \quad (\lambda_1 \leq \dots \leq) \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} (\leq \dots \leq \lambda_N)$$

diciamo che $x_0$ è punto di sella per $f$.

$\circledast$ significa che c'è un certo numero $\neq 0$ di autovalori negativi,
c'è un certo numero $\neq 0$ di autovalori positivi
e $0$ non è autovalore.

IN QUESTO CASO se considero i corrispondenti autovettori $e_1 \dots e_N$ $\left( e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se} = 1 \end{cases} \right)$, allora definendo

$$X^+ = \text{span}\{e_i : \lambda_i > 0\}$$
$$X^- = \text{span}\{e_i : \lambda_i < 0\}$$

(span$(w_1 \dots w_k)$ = spazio delle comb. lineari di $w_1 \dots w_k$)

$\Rightarrow \mathbb{R}^N = X^+ \oplus X^-$.

Se prendo $\vec{v}^+ \in X^+ \Rightarrow f(x_0 + \vec{v}^+)$ ha min. loc. in $x_0$
Se prendo $\vec{v}^- \in X^- \Rightarrow f(x_0 + \vec{v}^-)$ ha max loc. in $x_0$

Per esempio se considero $f(x,y) = xy$ (in $\mathbb{R}^2$)

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. L'unico pto stazionario è $\mathbf{0} = (0,0)$

Chi è $H_f$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 1$

$\Rightarrow H_f(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Cerco gli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$

Noto che $\det H_f(0) = -1 = \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1$ e $\lambda_2$ DISCORDI.

DUNQUE $\mathbf{0}$ è punto di sella.

Cerchiamo $\lambda_1$ e $\lambda_2$ e cerchiamo $e_1$ $e_2$.

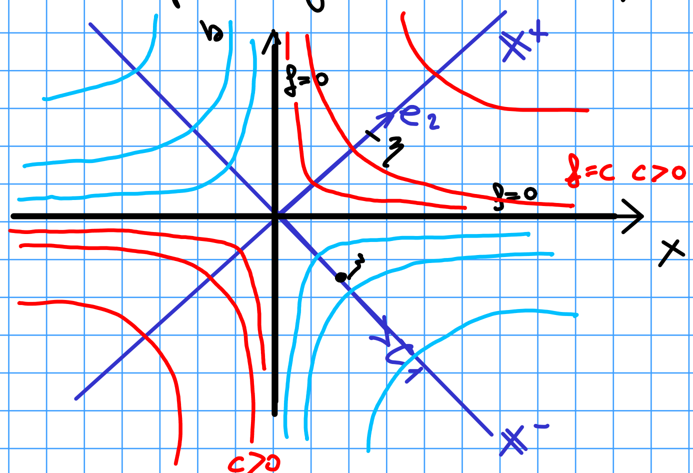
$p(\lambda) = \det\left( \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$

Se prendo $\lambda = \lambda_2 = 1$ voglio trovare $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

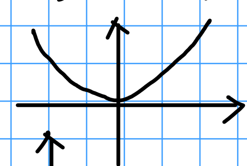
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad y = x \text{ ; per esempio } e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

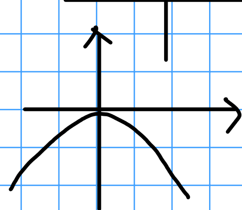
(se lo voglio di norma 1) A questo punto è chiaro che posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$




Cerchiamo le linee di livello di $f(x,y) = xy$

- $f^0 = \{(x,y) : xy = 0\}$ = le due rette $x=0$ / $y=0$
- $f^c$ se $c>0$. Cerco $(x,y)$: $xy = c > 0 \iff y = \frac{c}{x}$ $\quad c>0$
- $f^c$ se $c<0$ Cerco $(x,y)$: $xy = c < 0 \iff y = \frac{c}{x}$ $\quad c<0$

Se mi metto in $X^+$ vedo 

Se mi metto in $X^-$ vedo 

Per vedere devo introdurre due variabili $(\xi, \eta)$ che corrispondono agli assi $X^-$ e $X^+$. Se scrivo la $f$ in termini di $\xi$ ed $\eta$ trovo $-\xi^2 + \eta^2$ (in $(\xi, \eta)$ la matrice Hessiana diventa $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ABBIAMO SOSTANZIALMENTE DISTINTO TRE CATEGORIE DI PUNTI

PTI DI MAX
PTI DI MIN

$\Big\}$ PUNTI ESTREMALI

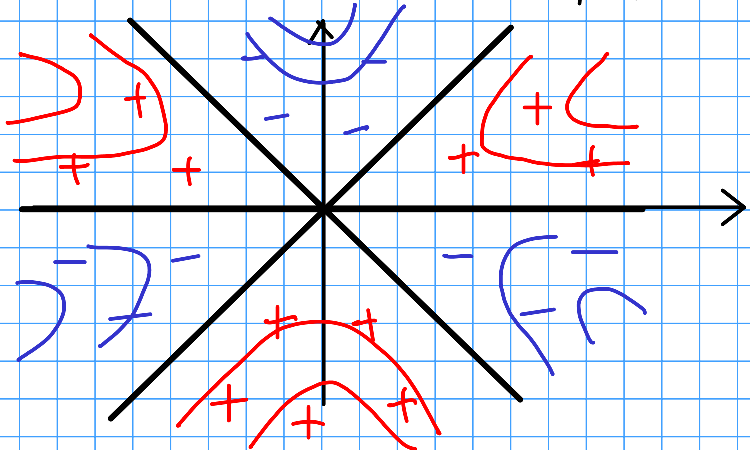
PTI DI SELLA

<u>NON ESAURISCONO TUTTI I PUNTI POSSIBILI</u>

Per es. se $f(x,y)=(x^2-y^2)y = (x^2y-y^3)$ se cerco la linea di livello alla quota $c=0$ dove

$f=0$ sulle rette $y=0$, $y=x$, $y=-x$

$y(x-y)(x+y)\geq 0$



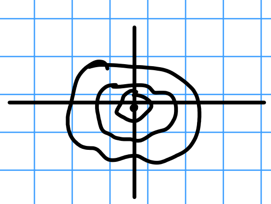
Vediamo che $(0,0)$ è critico: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2-3y^2$

$$\begin{cases} 2xy=0 \\ x^2-3y^2=0 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} x=0 \to y=0 \\ y=0 \to x=0 \end{array}$$

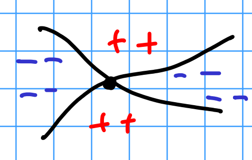
L'UNICO PTO CRITICO È $O=(0,0)$

$(0,0)$ (guardando le linee di livello $\{f=c\}$) NON È NÉ MAX NÉ MIN NÉ SELLA

Se fosse di max/min le linee di livello dovrebbero essere



MAX o MIN



SELLA

IN EFFETTI SE CALCOLO $H_f(0,0)$ trovo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -6y \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

<u>ESERCIZIO</u> $f(x,y) = e^{xy} + 4x^2 + 2y^2 - xy$

Cerco tutti i pti critici, cerco di classificarli. Cerco anche se $f$ ha max / min assoluto.

<u>RICERCA DEI PTI CRITICI</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} + 8x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} - x + 4y$$

Eguaglio a zero

$$\begin{cases} y(e^{xy}-1) + 8x = 0 \\ x(e^{xy}-1) + 4y = 0 \end{cases}$$

Dalla prima riga ricavo $x = -\frac{y}{8}(e^{xy}-1)$

dalla seconda riga ricavo $y = -\frac{x}{4}(e^{xy}-1)$

sostituisco $-\frac{x}{4}(e^{xy}-1)$ alla $y$ nella prima riga:

$$x = -\frac{1}{8}\left(-\frac{x}{4}\right)(e^{xy}-1)(e^{xy}-1) = \frac{x}{32}(e^{xy}-1)^2$$

Questa condizione (NECESSARIA) mi dà due possibilità:

(a) $x = 0$

(b) $(e^{xy}-1)^2 = 32$

Nel caso (a) il sistema originario mi dà $y = 0$ (guarda la II° riga)

(a) $\to$ $(0,0)$

Nel caso (b) ho $e^{xy} - 1 = \pm\sqrt{32} \Leftrightarrow e^{xy} = 1 \pm 4\sqrt{2}$

MA $1-4\sqrt{2} < 0$ NON PUÒ essere $e^{xy}$. RIMANE $e^{xy} = 1+4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow xy = c \left(:= \ln(1+4\sqrt{2})\right)$ TORNANDO AL SISTEMA

OTTENGO

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}\, y + 8x = 0 \\ x\, 4\sqrt{2} + 4y = 0 \\ xy = c \end{cases}$$

danno la stessa condizione $\sqrt{2}x + y = 0$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ xy = c \end{cases} \qquad y = \frac{c}{x} \qquad c = -\sqrt{2}x^2$$

che non ha soluzioni dato che $c = \ln(1+4\sqrt{2}) > 0$

L'UNICO PTO CRITICO È $(0,0)$. Che pezzo di pto critico è!

$$\left( \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y e^{xy} + 8x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x e^{xy} - x + 4y \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xy\, e^{xy} - 1$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ho determinante $< 0 \Rightarrow (0,0)$ è di SELLA

c'è un problema ??

$\Rightarrow (0,0)$ è pto di minimo.

- VEDIAMO COSA fa $f$ all'infinito

$$f(x,y) = e^{xy} + 4x^2 + 2y^2 - xy$$

GUARDIAMO $f$ sulla retta $x=y$

$$\varphi(x)=f(x,x)=e^{x^2}+4x^2+2y^2-x^2=e^{x^2}+3x^2+2y^2$$

$\varphi(x)\to +\infty$ se $|x|\to\infty$

GUARDIAMO $f$ sulla retta $y=-x$

$$\psi(x)=f(x,-x)=e^{-x^2}+4x^2+2y^2+x^2=\underbrace{e^{-x^2}+5x^2+2y^2}_{\to +\infty}$$

SEMBRA CHE $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=+\infty$ $(\forall\,\forall)$

· I CALCOLI sulle due rette $x=y$ e $x=-y$ sono dei buoni indizi, ma non bastano. BISOGNA DIMOSTRARE $(\infty,\infty)$ CON UNA "MINORAZIONE"

La cosa più semplice: $e^{xy}\geq 0 \implies$

$$f(x,y)\geq \underbrace{4x^2+2y^2-xy}$$

FORMA QUADRATICA ASSOCIATA A $\begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

HA Det $>0$ e $a_{11}>0 \implies$ è def. $>0$

$\implies$ la forma quadratica va a $+\infty$ se $\|(x,y)\|\to\infty$

IN DEFINITIVA $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=+\infty \implies f$ ha minimo

$\implies$ il pto di minimo è $(0,0) \implies \min_{\mathbb{R}^2} f=f(0,0)=1$

$$f(x,y)\geq 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

---

ESERCIZIO SIMILE $f(x,y)=4x^2+2y^2-xy-e^{xy}$

Calcolo le derivate I° e II° :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y - y e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x - x e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - y^2 e^{xy} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 - x^2 e^{xy} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -1 - e^{xy} - xy\, e^{xy}$$

PTI CRITIC

$$\begin{cases} 8x - y(1+e^{xy}) = 0 \\ -x(1+e^{xy}) + 4y = 0 \end{cases}$$

Si potrebbe ragionare come prima.

VARIANTE

Se chiamo $a = (1+e^{xy})$ ho $\begin{cases} 8x - ay = 0 \\ -ax + 4y = 0 \end{cases}$ $\nearrow (x,y) = 0$ ; $\searrow \det \begin{pmatrix} 8 & -a \\ -a & 4 \end{pmatrix} = 0$

HO TROVATO IL PTO CRITICO $(0,0)$.

Se $(x,y)$ è critico e $(x,y) \neq (0,0)$ deve essere per forza

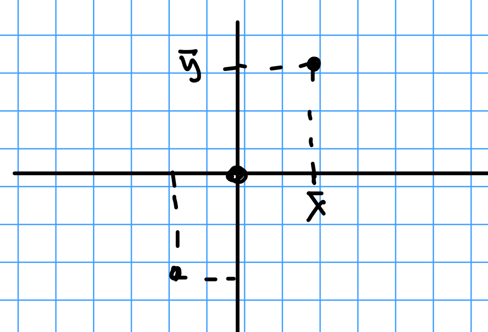
$$32 - a^2 = 0 \iff 32 = (1+e^{xy})^2 \iff 1+e^{xy} = \pm 4\sqrt{2}$$

$$\iff e^{xy} = 4\sqrt{2} - 1 \quad (\text{quello col } - \text{ non va})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 4\sqrt{2}\,y \\ xy = c \end{cases} \quad \text{dove } c = \ln(4\sqrt{2}-1) > 0$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}\,x \\ xy = c \end{cases} \iff \begin{cases} c = \sqrt{2}\,x^2 \\ y = \frac{c}{x} \end{cases} \qquad x = \pm \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{2}} = \pm \bar{x} \Big/ y = \pm \sqrt{c}\,\sqrt[4]{2}$$

CI SONO TRE PTI CRITICI




CONCLUDIAMO DOMANI