Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 18/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TAYLOR $\quad f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $x_0 \in \Omega$

f di classe C^n

Def. Chiamo polinomio di Taylor, di ordine n, centrato in x_0 il polinomio

$$P_{n,x_0}(v) = \sum_{|\alpha| \le n} \underbrace{\frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)}_{\text{coefficienti del polinomio}} v^\alpha \qquad v \in \mathbb{R}^N$$

(al posto di v ci metterò $x - x_0$)

La prima formula è quella "con resto di Lagrange" e si può scrivere se Ω è CONVESSO

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se

dati $P, Q \in A$ e dato $t \in [0,1] \Rightarrow tP + (1-t)Q \in A$

(se t varia tra 0 e 1 il punto $tP + (1-t)Q$ descrive il segmento tra Q e P — se $t=0$ trovo Q, se $t=1$ trovo P; NOTA CHE

$$tP+(1-t)Q = Q + t\underbrace{(P-Q)}_{\text{vettore direzione}}$$ — di solito si prende $P + t(Q-P)$)

<u>TEOREMA</u> Se Ω è convesso e $f \in C^{n+1}(\Omega)$ $\Longrightarrow$

$\forall x \in \Omega$ esiste un punto x' sul segmento tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_{n,x_0}(x-x_0) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x')(x-x_0)^\alpha}_{\text{resto di Lagrange}}$$

N.B. dire x' sul segmento tra x_0 e x vuol dire che

$$x' = x_0 + t(x-x_0) \quad \text{per un } t \text{ tra } 0 \text{ e } 1$$

(in realtà t lo trovo in $]0,1[$).

<u>Dim</u> Dato x definisco $\varphi(t) := f(x_0+t(x-x_0))$ $0 \le t \le 1$ (guardo f sul segmento tra x_0 e x). È chiaro che φ è C^{n+1} su $[0,1]$ (anzi su un intervallo a,b : $]a,b[\supset [0,1]$)

Inoltre — per quanto visto l'ultima volta —

$$\varphi(0) = f(x_0)$$

$$\varphi'(0) = f'(x_0)(x-x_0) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))\overbrace{(x-x_0,\dots,x-x_0)}^{k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha$$

$$\vdots$$

$0 \le k \le n+1$

Applico Taylor con resto di Lagrange (di Analisi 1) alla funzione φ :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \underbrace{(1-0)^k}_{=1} + \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \Longrightarrow$$

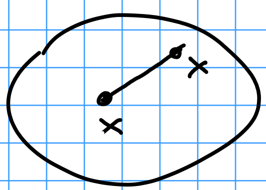
$0 < t < 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\cancel{k!}} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\cancel{k!}}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha +$$

$$\frac{1}{\cancel{(n+1)}!} \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\cancel{(n+1)}!}{\alpha!} D_\alpha f(\underbrace{x_0+t(x-x_0)}_{x'})(x-x_0)^\alpha =$$

$$P_{m,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x')(x-x_0)^\alpha$$

#



<u>TEOREMA</u> (Formula con resto di Peano). Se f è C^n (non chiedo che Ω sia convesso) posso scrivere

$$f(x) = P_{m,x_0}(x-x_0) + o\left(\|x-x_0\|^n\right)$$

IN ALTRI TERMINI $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{m,x_0}(x-x_0)}{\|x-x_0\|^n} = 0$

<u>Dim</u> Prendo $r>0$ tale che $B(x_0,r) \subset \Omega$.
SO CHE $B(x_0,r)$ è convesso $\Rightarrow$ posso usare il teorema precedente in $B(x_0,r)$. ALLORA POSSO SCRIVERE

$$f(x) = P_{n-1,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x')(x-x_0)^\alpha$$

Questa formula la posso scrivere $\forall x \in B(x_0,r)$ e naturalmente x' dipende da x; anzi so che $\exists t = t_x$ che dipende da x per cui $x' = x_0 + t_x(x-x_0)$. A destra della formula aggiungo e tolgo $\sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha(x_0)(x-x_0)^\alpha$ e trovo

$$f(x) = P_{n,x_0}(x-x_0) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!}\left(D_\alpha f(x') - D_\alpha f(x_0)\right)(x-x_0)^n}_{R_{n,x_0}(x,x_0)}$$

R_n dipende anche da x' – ma x' dipende da x_0. Lo divido per $\|x-x_0\|^n$

$$\frac{|R_{n,x_0}(x,x_0)|}{\|x-x_0\|} \leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!}\left|D_\alpha f(x_0+t_x(x-x_0)) - D_\alpha f(x_0)\right| \left|\frac{(x-x_0)^\alpha}{\|x-x_0\|}\right|$$

SI VEDE che $(x-x_0)^\alpha \leq \|x-x_0\|^n$

$$\uparrow$$

$$(x_1 - x_{0,1})^{\alpha_1} \cdots (x_p - x_{0,p})^{\alpha_p} \leq \qquad \Longrightarrow$$

$$\|x-x_0\|^{\alpha_1} \cdots \|x-x_0\|^{\alpha_N} = \|x-x_0\|^N$$

$$\frac{|R_{n,x_0}(x,x_0)|}{\|x-x_0\|} \leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!}\left|D_\alpha f(x_0+t_x(x-x_0)) - D_\alpha f(x_0)\right|$$

$\downarrow$ perché $x' = x_0 + t_x(x-x_0) \to x_0$ se $x \to x_0$

e dunque $D_\alpha f(x') \to D_\alpha f(x_0)$ (f è C^n)

HO DIM. che $R_{n,x_0}(x-x_0) = o(\|x-x_0\|^n)$ $\#$

<u>FATTO</u> È VERO ANCHE che P_{n,x_0} è L'UNICO polinomio (IN N-VARIABILI !!!) di grado $\leq N$ che verifica

$$f(x) = P_{n,x_0}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^n)$$

(non lo dimostro).

<u>ESEMPIO</u> $f(x,y) = e^{xy+3x}$ CERCO IL POLINOMIO

di ordine TRE NEL PUNO $(0,0)$

MI SERVONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI FINO ALLE TERZE

- CALCOLATE IN ZERO

ORDINE ZERO $\quad f(0,0)=1$

ORDINE UNO $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = (y+3)e^{xy+3x} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=3$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{xy+3x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\left(\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)$$

ORDINE DUE $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+3)^2 e^{xy+3x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=9$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy+3x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{xy+3y} + x(y+3)e^{xy+3y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1$$

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix}9 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (y+3)^3 e^{xy+3x} \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=27$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y+3)^2 e^{xy+3x} = 2(y+3)\,e^{xy+3x} + x(y+3)^2 e^{xy+3} \rightarrow 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 e^{xy+3x}\right) = 2x\,e^{xy+3x} + x^2(y+3)\,e^{xy+3x} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^3 e^{xy+3x} \longrightarrow 0$$

$$\nabla f(0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\left(Hf(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

DUNQUE $\quad P_{3,0}(x,y) = 1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2 + xy +$

$$\frac{9}{2}x^3 + 3x^2y + \cancel{0xy^2} + \cancel{0y^3}$$

$$\sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(0,0)\, x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

QUALI MULTIINDICI $(3,0)$ $(2,1)$ $(1,2)$ $(0,3)$

	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$
$\frac{1}{\alpha!}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$D_\alpha f(0,0)$	27	6	0	0

VICINO A $(0,0)$ $\quad f(x,y) \simeq 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + xy + \frac{9}{2}x^3 + 3x^2 y$

HO USATO LA DEFINIZIONE (è un po' lungo...)

IN REALTÀ, se conosco alcuni sviluppi notevoli (QUELLI DI AN1) posso evitare il calcolo delle derivate nello $(x,y) \neq (0,0)$

TORNIAMO A $\quad f(x,y) = e^{xy+3x}$

MI RICORDO CHE
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad (t \in \mathbb{R})$$
$$= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \sigma(t)\, t^3 \quad \text{con } \sigma(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$$

NOTO CHE $xy + 3x \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$ METTO $xy+3x$ al posto di t. VIENE

$$f(x,y) = 1 + xy + 3x + \frac{(xy+3x)^2}{2} + \frac{(xy+3x)^3}{6}\left(1 + \sigma(xy+3x)\right)$$

$$= 1 + xy + 3y + \underbrace{\frac{x^2y^2}{2}}_{\substack{\text{grado 4} \\ \text{è } o(\|x,y\|^3)}} + 3x^2 y + \frac{9x^2}{2} + \frac{x^3}{6}(y+3)^3\left(1 + \sigma(-)\right) =$$

$$= 1 + xy + 3y + 3x^2 y + \frac{9x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big(27 + \overbrace{\text{pezzi grado} \geq 1}^{\text{tendono a zero}}\Big)\left(1 + \sigma(-)\right) + \frac{x^2y^2}{2}$$

$$= \underbrace{1 + xy + 3y + 3x^2 y + \frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2}x^3}_{} + \underbrace{o(\|x,y\|^3)(1+\sigma) + o(\|\ \|^3)}_{o(\|\ \|^3)}$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor $\Rightarrow P_{3,00}(x,y)$

TORNA CON QUANTO TROVATO PRIMA

ALTRO ESEMPIO (Compitino A del 2/12/2022)

$$f(x,y,z) = (1+xy)\ln(1-xz)$$

VOGLIO TROVARE

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) = \boxed{0} \qquad \frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = \boxed{-6}$$

Cerco il Polinomio $P_6(x,y,z) = P_{6,(0,0,0)}(x,y,z)$

Mi serve lo sviluppo di $\ln(1-xz)$ all'ordine 6.

Uso lo sviluppo di $\ln(1-t)$ $\boxed{\text{all'ordine } 3 \,!!}$

PERCHÈ CI METTERÒ $t = xy$ e $-xy$ è di grado 2

So che

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\left(\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right)$$

$z = O(\| \,\|)$
$x = O(\| \,\|)$
$y = O(\| \,\|)$

$o(\| \,\|^3)$ perché $x^3 z^3 = O(\| \,\|^6)$

$\Rightarrow$

$$\ln(1-xz) = -xz - \frac{(xz)^2}{2} - \frac{(xz)^3}{3} + o(x^3 z^3) =$$

$$-xz - \frac{x^2 z^2}{2} + \frac{x^3 z^3}{3} + (\|x,y,z\|^3)$$

(si potrebbe fare meglio ma lascio così)

MOLTIPLICO PER $1+xy \Rightarrow$

$$f(x,y,z) = (1+xy)\left(-xz - \frac{x^2 z^2}{2} - \frac{x^3 z^3}{3} + o(\| \,\|^6)\right) =$$

$$\underbrace{-xz - \frac{x^2 z^2}{2} - \frac{x^3 z^3}{3} - x^2 y z - \frac{x^3 y z^2}{2}}_{P_6(x,y,z)} + o(\| \,\|^6)$$

$A = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(0,0,0) = ?$ MI RICORDO CHE IL COEFF. D xyz in P_6 deve esse $\frac{A}{(1,1,1)!} = A$

Dato che xyz non compare in P_6 $\Rightarrow$ $\boxed{A=0}$

$B = \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$ corrisponde al multi indice $(3,1,2)$ e dunque al termine $x^3 y z^2$ in $P_6(x,y,z)$

Vedo che il coeff. è $-\frac{1}{2} = \frac{B}{(3,1,2)!} = \frac{B}{6 \cdot 1 \cdot 2} \iff \boxed{B = -6}$

ESEMPIO $f(x,y,z) = \sin(x+yz)e^{xy}$

$P_4(x,y,z) = P_{4,(0,0,0)}(x,y,z)$ NON VOGLIO FARE DERIVATE

USO GLI SVILUPPI NOTI

$P = (x,y,z)$

$(x+yz)^4 = o(\|P\|^4)$

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ (dopo $\frac{t^3}{6}$ c'è $\frac{t^5}{5!}$.)

$x = O(\|P\|)$

$yz\ O = (\|P\|^2)$

$\Rightarrow \sin(x+yz) = x + yz - \frac{1}{6}(x+yz)^3 + o((x+yz)^4) =$

$x + yz - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2yz + \underbrace{3xy^2z^2 + y^3z^3}_{= o(\|P\|^4)}) + o(\|x,y,z\|^4) =$

$x + yz - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2yz + o(\|P\|^4)$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow$

$e^{xy} = 1 + xy + \underbrace{\frac{x^2y^2}{2}}_{o(\|P\|^3)} + o(\|P\|^4) \Rightarrow$

$f(x,y,z) = \left(x + yz - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2yz}{2} + o(\|P\|^4)\right)\left(1 + xy + o(\|P\|^3)\right)$

$= x + yz - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2yz}{2} + x^2y + xy^2z + o(\|P\|^4)$

$= x + \underbrace{yz}_{\text{UNICO TERMINE QUADRATICO}} - \frac{x^3}{6} + x^2y - \frac{x^2yz}{2} + xy^2z + o(\|P\|^4)$

NE SEGUE

$$f(0)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0)=1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0)=0=\frac{\partial f}{\partial z}(0)$$

$$H_f(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(L'UNICA DERIVATA II° NON NULLA È $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \text{ che fa } 1}$

che ~~corrisponde~~ a $(0,1,1)$

(e nella formula ho

$\alpha=(0,1,1) \Rightarrow \alpha!=1$ e nella formula ho $\underbrace{\frac{D_\alpha(0)}{\alpha!}}_{1} x^0 y^1 z^1$

ANALOGAMENTE POSSO TROVARE TUTTE LE DERIVATE TERZE E QUARTE IN $(0,0,0)$

Per esempio

$$\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^2 \partial z} f(0) = 1 \quad (1,2,1)! = 2$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}(0) = -\frac{1}{2} \quad (2,1,1)! = -1$$