Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

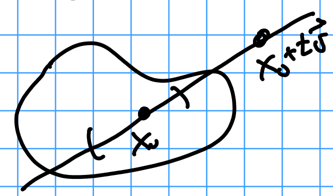
Lezione 23   18/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ricordiamo che è data $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto) di classe C^n ($\exists$ tutte le derivate parziali fino alle n-esime e sono continue), $x_0 \in \Omega$.

Dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ posso considerare $\varphi(t) := f(x_0 + t\vec{v})$ (definita per $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$ piccolo tale che $x_0 + t\vec{v} \in \Omega$). SI HA (visto l'altra volta!)



$$\varphi(0) = f(x_0) \qquad \text{e} \qquad k = 0 \dots n$$

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0 + t\vec{v})(\underbrace{\vec{v}, \dots, \vec{v}}_{k \text{ volte}}) = f^{(k)}(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}^{\,k}) = \circledast$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(\overbrace{\vec{v}, \dots, \vec{v}}^{k}) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}^{\,k})$$

INOLTRE

$$\circledast = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \dots \sum_{i_k=1}^{N}}_{k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (x_0 + t\vec{v}) \underbrace{v_{i_1} \dots v_{i_k}}_{k \text{ fattori}}$$

$$\vec{v} = (v_1 \dots v_k)$$

ci sono N^k termini - alcuni sono ripetuti.

Per esempio se prendo $N=3$ e $K=3$, cioè calcolo

$$f^{(3)}(\overbrace{x,y,z}^{P})(v_x, v_y, v_z) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=3} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} v_i v_j v_k$$

$$\begin{pmatrix} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x = v_1 \\ v_y = v_2 \\ v_z = v_3 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ 27 termini

posso raccogliere i termini uguali

$(i = i_1, j = i_2, k = i_3)$

CASO 1 $i=j=k$ $\rightarrow$ 1 SOLO TERMINE per ogni terna (i,i,i)

CASO 2 $i=j\neq k$ $\rightarrow$ Per ogni coppia i,k ci sono $\underline{\underline{3}}$ possibili termini (a seconda di dove metto k)

CASO 3 tre indici diversi $\longrightarrow$ 6 casi (le permutazioni di tre oggetti)

① $$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(P)\, v_x^3 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(P)\, v_y^3 + \frac{\partial^3}{\partial z^3} f(P)$$

② $$3\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} f(P)\, v_x v_y^2 + 3\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial z^2} f(P)\, v_x v_z^2 + \frac{3\,\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} f(P)\, v_x^2 v_y +$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial y} \Big/ \frac{\partial^3}{\partial y\partial x\partial y} \Big/ \frac{\partial^3}{\partial y\partial y\partial x}$$

$$3\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial z^2} f(P)\, v_y v_z^2 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial z} f(P)\, v_x^2 v_z + 3\frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial z} f(P)\, v_y^2 v_z$$

③ $$+\,6\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z} f(P)\, v_x v_y v_z$$

Mi sono ridotto a 10 termini

COME SCRIVERE QUESTA FORMULA IN GENERALE?

Def. Chiamo multiindice di ordine N o N-multiindice una N-pla di numeri interi ≥ 0 (considero ZERO intero)

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$$

Per esempio, se $N = 3$

$$\alpha = (1,0,7) \qquad \alpha = (0,2,2)$$

Chiamo lunghezza di α il numero intero

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

$|(0,0,0)| = 0 \qquad |(0,2,2)| = 4$

Chiamo <u>fattoriale</u> di α il numero intero

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$$

Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ definisco la "potenza α-esima di $\vec{v}$" come

$$\vec{v}^{\,\alpha} = v_1^{\alpha_1} \cdots v_N^{\alpha_N} \in \mathbb{R}$$

INFINE SE f è di classe C^n dove $n = |\alpha|$ chiamo "derivata parziale α-esima" la derivata

$$D_\alpha f(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

(se $\alpha_i = 0$ $\partial x_i^{\alpha_i}$ non c'è)

CON QUESTA NOTAZIONE - se sono in $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(P) = D_\alpha f(P) \quad \text{con } \alpha = (1,2,0)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} f(P) = D_\alpha f(P) \quad \text{con } \alpha = (0,0,3)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(P) = D_\alpha f(P) \quad \text{con } \alpha = (1,1,1)$$

CON QUESTE NOTAZIONI RIUSCIAMO A SCRIVERE DELLE FORMULE PIÙ COMPATTE.

<u>TEOREMA</u> (che cito solo come esempio)

Dati N e n interi vorrei trovare una formula per

$$(x_1 + \cdots + x_N)^n = \sum_{\substack{\alpha \text{ N-multiindice} \\ |\alpha| = n}} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha \qquad \leftarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

$x = (x_1, \ldots, x_N)$ coeff. multinomiale

NON DIMOSTRO. Se $N=2$ ritrovo la formula di Newton dato che i 2-multiindici di lunghezza n sono $(m, N-n)$

A NOI SERVIRÀ LA SEGUENTE FORMULA:

$$f^{(m)}(x)(\underbrace{\vec{v} \dots \vec{v}}_{m \text{ volte}}) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D_\alpha f(x) \, \vec{v}^{\,\alpha}$$

N multiindici

Confrontiamo questa formula con l'esempio iniziale.

N = 3

$$f'''(P)(\vec{v}) = \sum_{|\alpha|=3} \frac{3!}{\alpha!} \frac{\partial^3}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3}$$

Devo generare tutti i 3-multiindici di lunghezza 3:

(a) $(3,0,0)$ $(0,3,0)$ $(0,0,3)$

(b) $(2,1,0)$ $(1,2,0)$ $(2,0,1)$ $(1,0,2)$ $(0,2,1)$ $(0,1,2)$

(c) $(1,1,1)$

Nei multiindici della riga (a) ho $\alpha! = 3 \Rightarrow \frac{3!}{\alpha!} = 1$

Nei multiindici della riga (b) ho $\alpha! = 2 \Rightarrow \frac{3!}{\alpha!} = 3$

Nella riga (c) ho $\alpha! = 1 \Rightarrow \frac{3!}{\alpha!} = 6$

TORNA CON QUANTO VISTO PRIMA

POSSIAMO ORA SCRIVERE LA FORMULA DI TAYLOR

Se f è C^n posso scrivere:

$$f(x) = P_n(x-x_0) + R_n(x-x_0) \quad \text{con} \quad R_n(P) = o(\|P\|^n)$$

e

$$P_n(x-x_0) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) (x-x_0)^\alpha$$

CI TORNIAMO DOPO