Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 22 13/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

AVVISI

(1) REGISTRATEVI PER IL COMPITINO SU VALUTAMI

(2) CI SARÀ UNA LEZIONE DI RECUPERO LUNEDÌ ORE 16.30 – 18.30 AULA B11

DERIVATE II^e e di ordine superiore.

COMINCIO DALLE DERIVATE II^e.

<u>Def.</u> (Derivate direzionali di ordine 2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ (Ω aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$) $x_0 \in \Omega$.

Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ definisco la derivata direzionale

$$f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{w}) - f'(x_0)(\vec{w})}{t}$$

(nell'ipotesi che quello che ho scritto esista). In sostanza sto facendo la derivata direzionale lungo $\vec{v}$ della derivata direzionale lungo $\vec{w}$:

$$f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = g'(x_0)(\vec{v}) \quad \text{dove } g(x) = f'(x)(\vec{w})$$

(e prima l'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ conta).

<u>Def.</u> (differenziale secondo). Chiamo differenziale secondo di f il differenziale di df. CIOÈ dico che H è il differenziale secondo di f se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{df(x) - df(x_0) - H(x-x_0)}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

questa definizione è "complessa"; a numeratore $df(x)$ e $df(x_0)$ sono applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$: $df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$
(OPPURE posso pensare $df(x)$ come una matrice $M \times N$
DUNQUE H è lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$
(o H è lineare da $\mathbb{R}^N \to$ matrici $M \times N$)

Come posso interpretare H? $\quad H : \mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$
Dati $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$ ho che

$H\vec{w} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e dunque la posso calcolare in $\vec{v}$

$(H\vec{w})\vec{v} \in \mathbb{R}^M$. In definitiva posso pensare ad H come una applicazione bilineare da $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$
Questa H è il differenziale 2° che scrivo $d^2 f(x_0)$ che si può calcolare su $\vec{v}$ e $\vec{w}$, restituendo un elemento di $\mathbb{R}^M$

SI DIMOSTRA CHE, <u>se $d^2 f(x_0)$ esiste</u>, allora

$$d^2 f(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = f''(x_0)(\vec{v},\vec{w})$$

e dunque $f''(x_0)(\cdot,\cdot)$ è bilineare nei suoi due argomenti.

<u>DECIDO CHE</u> $f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$ si chiamano derivate parziali seconde, e le indico con $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$. <u>Se f è</u>

differenziabile due volte, usando la bilinearità, si ha

$$f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = d^2 f(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i,j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}}_{f''(x)(\hat{e}_i,\hat{e}_j)} v_j w_j$$

$$(\vec{v} = (v_1 \cdots v_N) \quad \vec{w} = (w_1 \cdots w_N))$$

(se f non è 2 volte diff. la formula sopra non è necessariamente vera).

Def Dico che f è $C^2(\Omega)$, se $\forall x$ $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ ed è continua in x.

TEOREMA (conseguenza del diff. tot.) Se f è di classe $C^2(\Omega)$

$\Rightarrow$ f è 2 volte differenziabile (con tutte le conseguenze)

TEOREMA (di Schwartz) Se f è C^2 $\Rightarrow$

$$f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = f''(x_0)(\vec{w},\vec{v})$$

cioè $d^2 f(x_0)$ è una applicazione bilineare simmetrica ($\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$)

NB. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^M$ dunque ci sono $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ $\quad i,j = 1 \cdots N$, $k = 1 \cdots M$

CONTROESEMPIO Ci sono casi in cui $d^2 f$ NON È SIMMETRICO (dunque f non è C^2). Prendiamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE (PARZIALI) PRIME

- CASO $(x,y) \neq (0,0)$; uso il calcolo delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2) + xy\,2x)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y\left[\left((x^2-y^2)+2x^2\right)(x^2+y^2)-2x^2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y\left[(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-2x^4+2x^2y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y\left(3x^4-x^2y^2+3x^2y^2-y^4-2x^4+2x^2y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

si possono rifare i calcoli OPPURE posso scambio x con y e moltiplico per -1 dato che $f(y,x)=-f(x,y)$

ANALOGAMENTE

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

- Calcolo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

mediante il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \ldots = 0$$

- CERCO $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, sempre mediante il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}^{=0}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x(x^4-4x^2 0^2 - 0^4)}{(x^2+0^2)^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1$$

INVECE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^4 + 4 0^2 y^2 - y^4}{(0^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^4}{y^4} = -1$$

Dunque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

PERÒ SE f è C^2 NON CI SONO PROBLEMI.

Allora conveniamo di mettere in ordine crescente le variabili al denominatore SCRIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (e non $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ invece di $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x}$

DEF. Nel caso $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (cioè $M=1$) chiamo MATRICE HESSIANA LA MATRICE

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

è una matrice $N \times N$ SIMMETRICA se $f \in C^2$

$H_f(x) = [h_{ij}]$ dove $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

È chiaro che $f''(x)(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v}^T H_f(x) \vec{w}$

Per esempio se $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-8xy$ (quella di ieri)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2+y^2} - 8y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{x^2+y^2} - 8x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2} = 2(1+2x^2)\, e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(1+2y^2)\, e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy\, e^{x^2+y^2} - 8 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

DUNQUE

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(1+2x^2)\, e^{x^2+y^2} & 4xy\, e^{x^2+y^2} - 8 \\ 4xy\, e^{x^2+y^2} - 8 & 2(1+2y^2)\, e^{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Se per esempio $(x,y)=(0,0)$ ho:

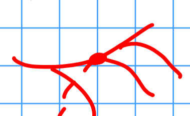
$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che (ieri) si è visto che $\nabla f(0,0)=0$.

Vediamo (per curiosità) se $Hf(0,0)$ è definita >0 o <0. ??

MA $\det(Hf(0,0)) = 4 - 64 = -60 < 0$ DUNQUE NON È NÉ >0 NÉ <0. È chiaro che deve avere due autovalori $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Vedremo che questo ci dice che $(0,0)$ è una "SELLA"



$\left(f(x,y) \simeq f(0,0) + \frac{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2}{2} \right.$ vicino a $\left. (0,0) \right)$

DERIVATE TERZE, QUARTE, ... ETC...

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$. FISSIAMO UN $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 3)$

Dati n vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in \mathbb{R}^N$ posso definire la der. direzionale

$$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) := \lim_{t \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + t\vec{v}_1) - f^{(n-1)}(x_0)}{t}$$

(in maniera iterativa) IN SOSTANZA

$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_N)$ si ottiene derivando $f(x)$ rispetto a $\vec{v}_n$ in x_0, derivando $f'(x)(\vec{v}_n)$ rispetto a $\vec{v}_{n-1}$ ... e così via.

IN PARTICOLARE definisco le derivate parziali n-esime

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} f(x_0) := f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_{i_1} \dots \vec{v}_{i_n})$$

($i_1 \dots i_n$ sono indici da 1 a N)

Dico che f è $C^n(\Omega)$ se tutte le derivate parziali fino alla n-esima esistono e sono continue

FATTO Se f è $C^n(\Omega)$ $\Rightarrow$

(1) $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \to f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ è n-lineare

(lineare rispetto a ogni argomento

(2) $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \to f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ è simmetrica: se scambio due argomenti ottengo lo stesso risultato

NB. Da (1) segue che

(**) $$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \dots \sum_{i_n=1}^{N} \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} f(x_0)\, v_{1,i_1} \dots v_{n,i_n}$$

PER ESEMPIO

$$f^{(3)}(x_0)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f(x_0)\, v_i w_j u_k$$

CONVENZIONE Se f è C^m, nello scrivere le derivate parziali possiamo convenire di mettere in ordine crescente le variabili, e quando si deriva più rispetto alla stessa variabile mettere una potenza: $\partial x_i^m = \underbrace{\partial x_i \partial x_i \cdots \partial x_i}_{m}$

PER ESEMPIO $$\frac{\partial^4 f}{\partial w \partial x \partial w \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial w^2 \partial z}$$

FACCIAMO UN CALCOLO. Data $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$ di classe C^n e dato $x_0 \in \Omega$, prendo $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$.

Allora

$\varphi(0) = f(x_0)$

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + (t+h)\vec{v}) - f(x_0 + t\vec{v})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v} + h\vec{v}) - f(x_0 + t\vec{v})}{h} = f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})$$

$\varphi'(0) = f'(x_0)(\vec{v})$

$$\varphi''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + (t+h)\vec{v})(\vec{v}) - f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + t\vec{v} + h\vec{v})(\vec{v}) - f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})}{h} =$$

$$= f''(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}, \vec{v})$$

$\varphi''(0) = f''(x_0)(\vec{v}, \vec{v})$

$\vdots$ ITERO IL RAGIONAMENTO

$$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(x_0 + t\vec{v})(\overbrace{\vec{v}, \dots, \vec{v}}^{n})$$

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}, \dots, \vec{v})$$

CONVENGO DI SCRIVERE $f^{(k)}(x_0)(\overbrace{\vec{v}, \dots \vec{v}}^{k \text{ volte}}) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}^{\,k})$

DUNQUE se $\varphi(t) = f(x_0 + t\cdot\vec{v})$ ho dimostrato

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x_0+t\vec{v}) = \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0+t\vec{v})(\vec{v}^{\,k})$$
$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}^{\,k})$$

METTIAMO $M=1$, dunque f è scalare (per semplicità)

NEL CASO $K=1$

$$\to \frac{d}{dt} f(x_0+t\vec{v}) = f'(x_0+t\vec{v})(\vec{v}) = J_f(x_0+t\vec{v})\vec{v} = \nabla f(x_0+t\vec{v})\cdot\vec{v}$$

Nel caso $K=2$

$$\frac{d^2}{dt} f(x_0+t\vec{v}) = f''(x_0+t\vec{v})(\vec{v},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+tv)v_i v_j$$

$$= H_f(x_0+tv)(\vec{v}^{\,2}) =: \vec{v}^{\,t} H_f(x_0+t\vec{v})\vec{v}$$

$$= \left(H_f(x_0+tv)\vec{v}\right)\cdot\vec{v}$$

Esempio di primo $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 8xy$

$(x_0,y_0) = (0,0) \qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{x_0}+tv_x,\ \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{y_0}+tv_y) = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{e^{(tv_x)^2+(tv_y)^2} - 8(tv_x)(tv_y)}_{\varphi(t)}$$

CALCOLIAMOLA DIRETTAMENTE

$\varphi(t) = e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 8t^2 v_x v_y$, derivo due volte in t:

$\varphi'(t) = 2t(v_x^2+v_y^2)e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 16t\, v_x v_y$

$\varphi''(t) = 2(v_x^2+v_y^2)e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} + 4t^2(v_x^2+v_y^2)e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 16 v_x v_y$

VEDIAMO SE TORNA CON LE FORMULE SOPRA

$\varphi'(t) = \nabla f(\underbrace{tv_x, tv_y}_{})\cdot(v_x, v_y) =$

$$\begin{pmatrix} 2x\, e^{x^2+y^2} - 8y \\ 2y\, e^{x^2+y^2} - 8x \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=tv_x \\ y=tv_y}} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2tv_x\, e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 8tv_y \\ 2tv_y\, e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 8tv_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} =$$

$$2t v_x^2\, e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 8t v_x v_y + 2t v_y^2\, e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 8t v_x v_y =$$

$$2t(v_x^2+v_y^2)\, e^{t^2(v_x^2+v_y^2)} - 16 t v_x v_y \qquad \text{TORNA}$$

VEDIAMO $\varphi''(tv_x, tv_y) = Hf(tv_x, tv_y)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}^2 =$

. . . chi lo voglia finisca la verifica . . .

Riscriviamo la formula:

Se $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v}) \Rightarrow$

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}^{\,k}) \quad ★$$

(se $k=1$ è $\nabla f(x_0+t\vec{v})\cdot\vec{v}$, se $k=2$ è $Hf(x_0+tv)(\vec{v})\cdot\vec{v}$)

Per quanto visto prima (considero ★, per $t=0$)

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_k) = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)\, \underbrace{v_{i_1}\cdots v_{i_k}}_{k \text{ fattori}}}_{\substack{\text{in questa espressione molti termini} \\ \text{sono ripetuti - se scambio due} \\ \text{derivate il risultato non cambia}}}$$

Per esempio $\varphi^{(2)}(0) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, v_i v_j =$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)\, v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, v_i v_j$$