Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21   12/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\qquad C^1$

$\gamma :]a,b[\to \Omega \qquad C^1$

Allora la funzione composta $f \circ \gamma$ (f sulla curva) è derivabile e si ha

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Questa è una conseguenza del teorema sul differenziale della composizione. In questo caso

$$J_f(x) = \nabla f(x)^t = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right]$$

$$J_\gamma(t) = \gamma'(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_N'(t) \end{bmatrix}$$

Dato che $f \circ \gamma :]a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad J_{f\circ\gamma}(t) = \left[(f\circ\gamma)'(t) \right]$ e per la regola:

$$\left[(f\circ\gamma)'(t)\right] = J_{f\circ\gamma}(t) = \overbrace{J_f(\gamma(t))}^{\nabla f(\gamma(t))^t} \underbrace{J_\gamma(t)}_{= \gamma'(t)} = \left[\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right]$$

COLONNA

DUNQUE LA FORMULA È VERA.

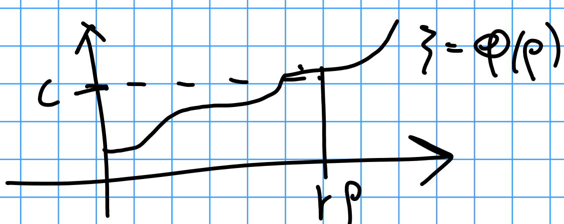
$$(f\circ\gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

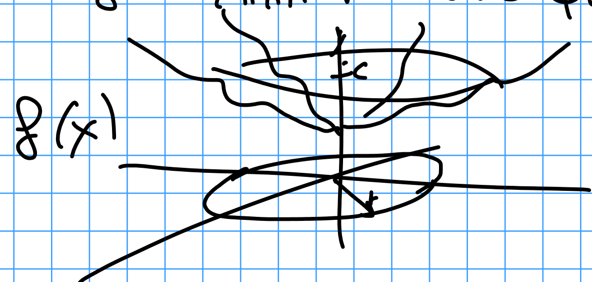
L'ABBIAMO GIÀ USATA per mostrare che, se S è una "superficie di livello" (cioè S è un insieme su cui f è costante) ALLORA, se $P\in S$,

$\nabla f(P)$ è ortogonale a ogni direzione $\vec{v}$ tangente a S in P

Se per esempio f è radiale cioè $f(x)=\varphi(\|x\|)$

allora le superfici di livello $f^c = \{x : f(x)=c\}$ sono delle sfere: $\{\|x\|=r\}$ (o più in generale unioni di sfere — se per esempio φ è crescente $\Rightarrow$ $f^c = \{\|x\|=r\}$ dove $\varphi(r)=c$





Mettiamoci in questa situazione. Allora:

$$(1)\quad \nabla f(P) = \nabla\varphi(\|P\|) = \varphi'(\|P\|)\left(\nabla\|x\|\Big|_{x=P}\right)$$

MI SERVE IL GRADIENTE DI $n(x)=\|x\|$:

$$n(x)=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x_i}(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_i}(x) = \underbrace{\frac{x_i}{\|x\|}}_{\text{continua in } x}$$

se $x\neq 0$
(se $x=0$ non è derivabile)

$\Rightarrow$ n è differenziabile e $\nabla n(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ se $x\neq 0$

ANALOGAMENTE se $m(x) = \|x\|^2 \Rightarrow \nabla m(x) = 2x$ ANCHE IN $x=0$

$m_p(x) = \|x\|^p$, con $p>1 \Rightarrow \nabla m_p(x) = p\,\|x\|^{p-1}\dfrac{x}{\|x\|} = p\,\|x\|^{p-2}x$ ANCHE IN $x=0$

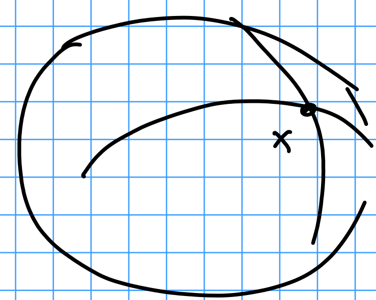
HO TROVATO CHE, se $m(x) = \|x\|$

$$\boxed{\nabla m(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{per } x \neq 0}$$

(2) Dal disegno di prima segue che

$$\nabla m(x) \perp \vec{v} \quad \text{per ogni } \vec{v} \text{ tangente alla sfera passante per } x$$

VERIFICHIAMOLO: Se $\vec{v}$ è tangente alla sfera $\Rightarrow \exists$ una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) \in$ sfera $\forall t$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = \vec{v}$



Se γ è una tale curva si ha che

$\|\gamma(t)\| = r$ costante $(r = \|x\|)$

$\Updownarrow$

$\|\gamma(t)\|^2 = r^2 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\,\gamma(t)\cdot\gamma(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0$

$\Leftrightarrow 2\,x\cdot\vec{v} = 0$ (i vettori tangenti alla sfera sono detti perpendicolari al raggio)

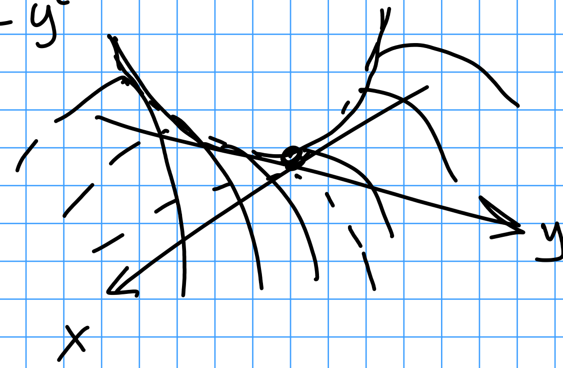
È anche facile vedere il viceversa: se $\vec{v}\cdot x = 0 \Rightarrow$ esiste una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to$ sfera : $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = \vec{v}$

IN DEFINITIVA HO (se $x \neq 0$)

$$\nabla f(x) = \varphi'(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|},$$

e le direzioni tangenti sono tutti i vettori $\vec{v}$ con $\vec{v} \cdot X = 0$

ALTRO ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$

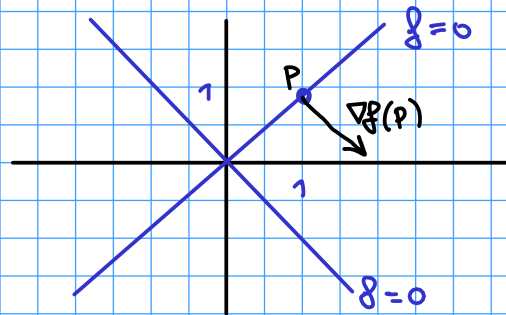


f è C^1

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j}$$

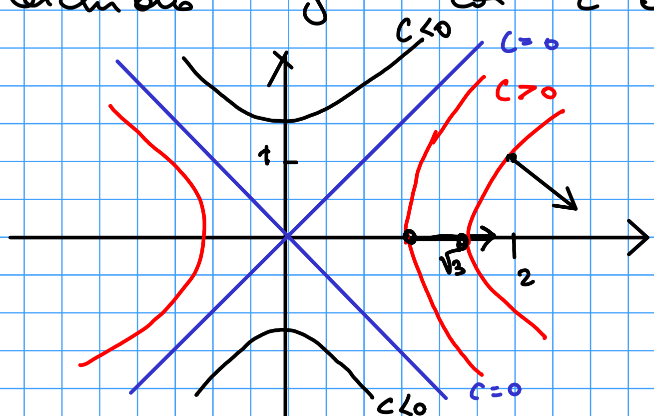
Vediamo le linee di livello $f^c = \{(x,y) : x^2 - y^2 = c\}$

SE $c=0$ ho $x^2 = y^2 \iff x = y$ o $x = -y$



Se $P = (1,1) \in f^0$, il gradiente è $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Se cerchiamo f^c con c che varia in $\mathbb{R}$ troviamo



$c > 0$ $\quad x^2 - y^2 = c \iff$

$y^2 = x^2 - c \implies |x| \geq \sqrt{c}$

$y = \sqrt{x^2 - c}$

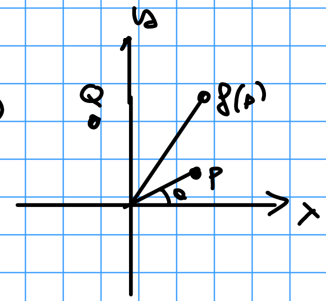
in $(1,0)$ $\quad (c = 1)$ $\quad \nabla f = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

in $(2,1)$ ho $c = 3$ $\quad \nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ....

(lascio perdere la verifica, col disegno, che $\nabla f(2,1) \perp \{f = 3\}$)

ESEMPIO (sul significato della matrice Jacobiana)

Prendo $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Ricordo che, se $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho \sin\theta$ $\Rightarrow$

$$f(x,y) = \rho^2 \left(\cos(2\theta), \sin(2\theta) \right)$$

Prendo $(x,y) \neq (0,0)$ e calcolo la matrice Jacobiana

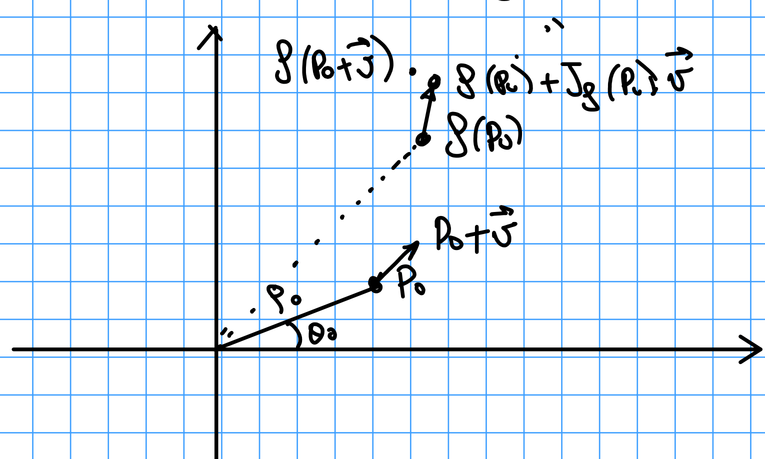
$$\rightarrow \quad J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} = 2\sqrt{x^2+y^2} \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} , & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

Se $P = (\rho\cos(\theta), \rho\sin\theta) \Rightarrow J_f(P) = 2\|P\| \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos\theta \end{bmatrix}$

VICINO A $P = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ f si comporta come una rotazione di θ + omotetia $2\|P\|$

ricordiamo che, se $P \simeq P_0$

$$f(P) \simeq f(P_0) + J_f(P_0)(P-P_0) + o(\|P-P_0\|)$$



Def. Dico che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è connesso (per archi) se presi P e Q in Ω esiste una curva C^1 <u>dentro Ω</u>

che congiunge P e Q. Più precisamente esiste $\gamma:[0,b]\to\Omega$ di classe C^1, t.c. $\gamma(0)=P$ $\gamma(b)=Q$

PROP Se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è C^1. Se Ω è connesso, allora

$$\nabla f(x)=0 \quad \forall x\in\Omega \iff f \text{ è costante in } \Omega$$

Dim. $\Leftarrow$ è ovvio perché la derivata di una costante è nulla.

Della meglio, se $i=1..N$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{d}{dt}f(x+t\hat{e}_i)\Big|_{t=0}$

Dato che $f(x+t\hat{e}_i)$ è costante $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0$ $i=1..N$

$\Rightarrow \nabla f(x)=0$ QUI NON SERVE CHE Ω SIA CONNESSO

$\Rightarrow$ Fissiamo un punto $P_0\in\Omega$ e facciamo vedere che

$$f(P)=f(P_0) \quad \forall P\in\Omega$$

In effetti, dato P, so che esiste $\gamma:[0,b]\to\Omega$, C^1, con $\gamma(0)=P_0$ $\gamma(b)=P$. Allora

$$(f\circ\gamma)'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{perché } \nabla f=0\\ \text{in } \Omega\end{array}\right)$$

MA ALLORA $\underbrace{f(\gamma(b))}_{=f(P)}-\underbrace{f(\gamma(0))}_{=f(P_0)}=\int_0^b(f\circ\gamma)'(t)\,dt=0$

$\Leftarrow$ dunque $f(P)=f(P_0)$

Dici semplicemente $f\circ\gamma:[0,b]\to\mathbb{R}$ ha derivata nulla $\Rightarrow f\circ\gamma$ è costante (per Analisi I)

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Def. (generale) $f:A\to\mathbb{R}$ $A\subset\mathbb{R}^N$ (NON CHIEDO NIENTE SU A)

Se $x_0\in A$ dico che x_0 è punto di massimo (minimo) relativo (o locale) per f su A se esiste $r>0$ tale che

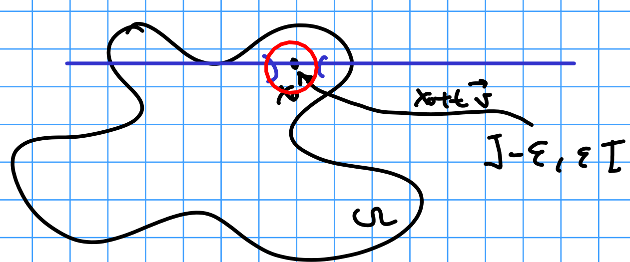
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in B(x_0,r) \cap A$$
$$\left(f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x_0,r) \cap A \right)$$

TEOREMA DI FERMAT Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è C^1 (basta che $\exists$ le derivate parziali), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **APERTO**. Se $x_0 \in \Omega$ è pto di max o di min relativo, allora

$$\nabla f(x_0) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$$

Dim Fisso una direzione $\vec{v}$. Considero $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$

(NOTO CHE $x_0 + t\vec{v} \in \Omega$ per $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$ opportuno perché Ω è aperto)



$\varphi(0) = f(x_0)$ e $t=0$ è pto di max / min per φ

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$ (Analisi 1). Ma $\varphi'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$

Dunque
$$\nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$
$$\Updownarrow$$
$$\nabla f(x_0) = 0$$

N.B. x_0 NON PUÒ TROVARSI SU $\partial\Omega$

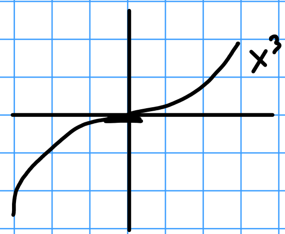
TERMINOLOGIA Se $\nabla f(x_0) = 0$ dico che x_0 è un punto critico (o stazionario) per f.

DUNQUE FERMAT afferma che

$$x_0 \in \Omega, \text{ pto di max/min rel.} \Rightarrow x_0 \text{ stazionario per } f.$$

È ben noto che $\Leftarrow$ non vale in generale. Per esempio

$f(x) = x^3 \Rightarrow$ $x=0$ è stazionario ma non è né di max né di min.



IN $\mathbb{R}^2$ posso considerare $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$. L'unico pt. critico è $(0,0)$

MA $\varphi(x,0)$ ha minimo in $x=0$
$\varphi(0,y)$ ha massimo in $y=0$ $\Big\} \leftarrow (0,0)$ NON È NÉ MAX NÉ MIN.

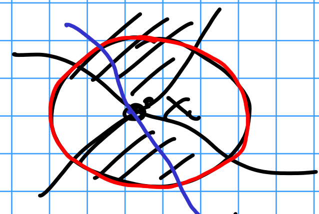
$(0,0)$ è "PUNTO DI SELLA"

VEDIAMO UNA VERSIONE PIÙ GENERALE CHE CI SERVIRÀ IN SEGUITO

<u>PROP (FERMAT GENERALIZZATO)</u> $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$, C^1.
Se $x_0 \in A$ è pto di max/min rel $\Longrightarrow$

$\circledast$ $\boxed{\nabla f(x_0) \text{ è ortogonale a } \vec{v} \text{ per ogni } \vec{v} \text{ tangente ad } A \text{ in } x_0}$

<u>Dim.</u> Suppongo che x_0 sia di min. rel. per f in A
Prendiamo $\vec{v}$ tangente ad A in x_0. So allora che esiste una curva $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v}$
Se considero $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, allora $t=0$ è pto. di min relativo (è ovvio)



$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$ cioè $\nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ cioè $\nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = 0$

<u>NOTIAMO</u> CHE se $A = \Omega$ è aperto, allora ogni $\vec{v}$

di $\mathbb{R}^N$ è tangente ad A in x_0; perché posso prendere
$\gamma(t) = x_0 + t\vec{v}$ ($\in \Omega$ per t piccolo). Dunque
nel caso A aperto ottengo $\nabla f(x_0)\cdot\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$

da cui $\nabla f(x_0) = 0$.

ESEMPIO $\quad f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 8xy \quad$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Mi chiedo se f ha massimo o minimo (ASSOLUTI)
e in caso affermativo li voglio calcolare.

NOTO CHE $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$. Infatti

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

$P = (x,y)$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy \le x^2+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \ge 0$$

Dunque $\quad f(x,y) \ge e^{x^2+y^2} - 4(x^2+y^2) = e^{\|P\|^2} - 4\|P\|^2$

Dato che $\displaystyle\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2} - 4\rho^2 = +\infty$ ottengo $\circledast$.

$\Rightarrow$ il max NON ESISTE
$\Rightarrow$ <u>il minimo esiste</u>

Per Fermat ($\Omega = \mathbb{R}^2$) se (x_0,y_0) è pto di min $\Rightarrow$
(x_0,y_0) è stazionario. CIOÈ

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+y^2} - 8y \\ 2y e^{x^2+y^2} - 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x e^{x^2+y^2} = 4y \\ y e^{x^2+y^2} = 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{4y = x e^{x^2+y^2}}_{\text{primo rigo}} = \underbrace{\frac{y e^{x^2+y^2}}{4}}_{\text{dalla II}^{\text{a}}\text{ rigo}} e^{x^2+y^2}$$

$$\iff 16y = y\left(e^{x^2+y^2}\right)^2 \quad \begin{cases} y = 0 \\ e^{x^2+y^2} = 4 \end{cases}$$

- Se $y=0$ dal sistema ho $x=0$ $\Rightarrow$ ho il punto $(0,0)$
- Se $y \neq 0$ deve essere $e^{x^2+y^2} = 4 \iff \boxed{x^2+y^2 = \ln 4}$ e inserendo questo in f nel sistema ho $\boxed{y = x}$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 2\ln(2) \iff y = x = \pm\sqrt{\ln(2)}$$

TROVO TRE PUNTI STAZIONARI $(0,0)$, $\pm\left(\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}\right)$

Il minimo di f sarà il valore più basso da

$$\underset{1}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}, \quad \underset{\underbrace{4 - 8\ln(2)}}{\overset{\shortparallel}{f\left(\pm\left(\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}\right)\right)}}$$

dovrebbe essere il più piccolo dei due

$$4 - 8\ln(2) < 1 \iff 8\ln(2) > 3 \iff \ln(2) > \frac{3}{8}$$

$$\iff 2 \quad e^{3/8}$$

LA CALCOLATRICE DICE CHE VA BENE

$$\Rightarrow \quad \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 4 - 8\ln(2)$$