Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 11/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- ABBIAMO definito differenziabilità, differenziale in $x_0 \in \Omega$ per una $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto.

- MATRICE JACOBIANA $J_f(x_0)$ è la matrice $M \times N$ tale che

$$df(x_0)(\vec{v}) = J_f(x_0)\vec{v} \quad \left(= f'(x_0)(\vec{v})\right) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

$J_f(x_0)$ è fatta così:
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

- SE $M=1$ GRADIENTE di f in x_0 è il vettore $\nabla f(x_0) := J_f(x_0)^t$ (è un vettore di $\mathbb{R}^N$) che ha proprietà

$$df(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v} \quad \left(= f'(x_0)(\vec{v})\right) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

PRODOTTO SCALARE

CALCOLO DELLE DERIVATE IN PIÙ VARIABILI

- (LINEARITÀ) f, g diff. in x_0, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g$ è diff. in x_0 e $d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df(x_0) + \mu\, dg(x_0)$

$$\Updownarrow$$

$$J_{\lambda f + \mu g}(x_0) = \lambda J_f(x_0) + \mu J_g(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f + \mu g)_j(x_0) = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) + \mu \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

- (PRODOTTI) $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$ diff in x_0, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ diff in x_0 $\Rightarrow gf: \Omega \to \mathbb{R}$ è diff. in x_0 e si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(gf)_j(x_0) = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} f_j(x_0) + g(x_0)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \longleftarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$J_{gf}(x_0) = \underbrace{\overset{\in \mathbb{R}^M}{f(x_0)} \otimes \overset{\in \mathbb{R}^N}{\nabla g(x_0)}}_{M \times N} + \underset{\mathbb{R}}{g(x_0)}\, \underbrace{J_f(x_0)}_{M \times N}$$

dove, dati due vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^h$ definisco $\vec{v} \otimes \vec{w}$ come quella matrice che ha come componenti $v_i w_j$ (che è una matrice $k \times h$)

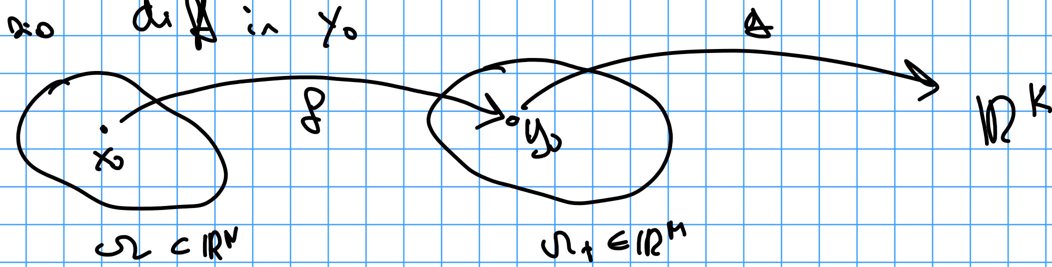
- $f, g: \Omega \to \mathbb{R}^M$ diff. in x_0, allora $f \cdot g: \Omega \to \mathbb{R}$ è diff. in x_0 e si ha

$$\frac{\partial f \cdot g}{\partial x_i}(x_0) = \overset{\in \mathbb{R}^M}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)} \cdot \overset{\in \mathbb{R}^M}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)$$

(sulle note c'è la versione matriciale $\simeq \nabla(f \cdot g)(x_0) = J_f(x_0)^t \nabla g(x_0) + J_g(x_0)^t \nabla f(x_0)$)

- FORMULA DI COMPOSIZIONE Supponiamo di avere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^M$, $f: \Omega \to \Omega_1$, $g: \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$

$x_0 \in \Omega \quad y_0 = f(x_0) \in \Omega_1$. Suppongo che f sia diff. in x_0 e che g sia diff in y_0



ALLORA $\quad g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^K$ è differenziabile in x_0 e si ha

$$d(g\circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0) \qquad (\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K)$$

$$\Updownarrow$$

PRODOTTO MATRICIALE

$$\boxed{J_{g\circ f}(x_0) = J_g(y_0)\, J_f(x_0)} = J_g(f(x_0))\, J_f(x_0)$$

<u>Cenno di dim.</u> So che

① f è diff. in $x_0 \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})$

② g è diff in $y_0 \Rightarrow \quad g(y) = g(y_0) + dg(y_0)(y-y_0) + o(\|y-y_0\|_{\mathbb{R}^M})$

$$\Downarrow$$

$$g(f(x)) \overset{②}{=} g(y_0) + dg(y_0)\big(f(x) - y_0\big) + o\big(\|f(x) - y_0\|_{\mathbb{R}^M}\big) =$$

$$g(f(x_0)) + dg(y_0)(f(x) - f(x_0)) + o\big(\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^M}\big)$$

$$\overset{①}{=} g(f(x_0)) + dg(y_0)\Big(df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})\Big) +$$

$$o\Big(\|df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})\|_{\mathbb{R}^M}\Big) =$$

$$= g(f(x_0)) + dg(y_0)\, df(x_0)(x-x_0) + dg(y_0)\,(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})$$
$$+ o\big(\|df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N}\|_{\mathbb{R}^M}\big)$$

Con un po' di pazienza — USANDO LE PROPRIETÀ DEGLI $o(\cdot)$ si vede che gli ultimi due termini sono $o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})$

- PER ESEMPIO $\frac{1}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N}}\left(dg(y_0)\, o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})\right) = dg(y_0)\Big(\underbrace{\frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\Big) \to 0 \quad (x \to x_0)$

- TRALASCIO IL SECONDO ADDENDO

DUNQUE

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + dg(y_0)\, df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})$$

che è la definizione di $\quad d(g\circ f)(x_0) = dg(y_0)\, df(x_0)$

Se guardo in una variabile $\quad df(x_0)(h) = f'(x_0)\, h$

$\qquad dg(y_0)(h_1) = g'(y_0)\, h_1$

cosa vuol dire $\quad dg(y_0)\, df(x_0)\, h = dg(y_0)\big(f'(x_0)\, h\big) = g'(y_0)\, f'(x_0)\, h$

$$\iff (g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0)$$

COSA MI DICE LA FORMULA DI COMPOSIZIONE SULLE DERIVATE PARZIALI di $g\circ f$??

Ricordiamo che $\quad \big(J_f(x_0)\big)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$

e ricordiamo che se $\underset{M\times N}{A = (a_{ij})}$ $\quad \underset{K\times M}{B = (b_{\ell k})}$

$$\Rightarrow (BA)_{ik} = \sum_{j=1}^{M} b_{ij}\, a_{jk} \qquad i = 1 \ldots K \quad k = 1 \ldots N$$

DA TUTTO QUESTO HO CHE

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i(x_0)}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(y_0)\, \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0)} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots K \\ k = 1 \ldots N \end{array}$$

CASO PARTICOLARE **IMPORTANTE** (cambio di notazioni)

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

$$\gamma :]a,b[\to \Omega \qquad \text{(CURVA IN } \Omega\text{)}$$

(C^1)

allora $f \circ \gamma :]a,b[\to \mathbb{R}$ e si ha

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \qquad \forall t_0 \in]a,b[$$