Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 19 06/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una funzione, $x_0 \in \Omega$ un punto.

Def. Dico che f è differenziabile in x_0 se esiste $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, un'applicazione lineare, tale che

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \overbrace{L(x - x_0)}^{\in \mathbb{R}^M}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

Se questo avviene dico che L è "un" differenziale di f in x_0.

VISTO CHE f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

CONFRONTIAMO LA NOZIONE DI DIFFERENZIALE CON QUELLA DI DERIVATA DIREZIONALE

Se vale $(*)$ posso calcolare quel limite sulle rette $x_0 + t\vec{v}$, per $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ assegnato. In altri termini, fisso un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, metto $x = x_0 + t\vec{v}$ nella $(*)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-L(\cancel{x_0}+t\vec{v}-\cancel{x_0})}{\|\cancel{x_0}+t\vec{v}-\cancel{x_0}\|_{\mathbb{R}^N}} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-tL\vec{v}}{|t|\,\|\vec{v}\|} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-tL\vec{v}}{t\,\|\vec{v}\|} = 0$$

(Si ottiene dalla precedente moltiplicando per $\frac{t}{|t|}$ che è limitata)

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t} - L\vec{v}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t} = L\vec{v} \qquad \forall\, \vec{v}\in\mathbb{R}^N$$

($\vec{v}\neq 0$ ma è chiaro che vale anche se $\vec{v}=0$)

DUNQUE HO DIMOSTRATO:

__Prop.__ Se f è differenziabile e L è un differenziale $\Rightarrow$ per ogni $\vec{v}\in\mathbb{R}^N$ esiste la derivata direzionale di f in x_0 lungo $\vec{v}$ e vale la formula:

$$(**) \qquad f'(x_0)(\vec{v}) = L\vec{v} \qquad \forall\, \vec{v}\in\mathbb{R}^N$$

NE SEGUE CHE C'È UN SOLO L possibile, perché la formula $(**)$ mi restituisce il valore $L\vec{v}$ per ogni $\vec{v}\in\mathbb{R}^N$ (in modo univoco perché $f'(x_0)(\vec{v})$, se esiste, è unico.

__IL DIFFERENZIALE È UNICO__ e lo indico con $df(x_0)$ $(=L)$

Inoltre, sempre da $(**)$, vedo che

__f differenziabile $\Rightarrow$ $\vec{v}\mapsto f'(x_0)(\vec{v})$ è lineare (in $\vec{v}$)__

(se dunque $\vec{v}\mapsto f'(x_0)(\vec{v})$ non è lineare $\Rightarrow$ f non è differenziabile in x_0).

DUNQUE, se f è differenziabile, per conoscere $f'(x_0)(\vec{v})$ basta conoscere $f'(x_0)(\hat{e}_i)$ $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ versori della base canonica di $\mathbb{R}^N$. Infatti se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ posso scrivere

$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N \Rightarrow$$

$$f'(x_0)(\vec{v}) = v_1 f'(x_0)(\hat{e}_1) + \dots + v_N f'(x_0)(\hat{e}_N)$$

Def. Chiamo derivata parziale i-esima di f in x_0 la derivata direzionale $f'(x_0)(\hat{e}_i)$ e la indico con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \left(:= f'(x_0)(\hat{e}_i) \right)$$

Si vede facilmente che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \varphi'(x_{0,i})$ dove

$$x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,N}), \quad \varphi(\xi) = f(x_{0,1}, \dots, \underbrace{\xi}_{\text{posizione i-esima}}, \dots x_{0,N})$$

(infatti $f'(x_0)(\hat{e}_i) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{0,1} \dots x_{0,i}+t \dots x_{0,N}) - f(x_0)}{t} =$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_{0,i}+t) - \varphi(x_{0,i})}{t} = \varphi'(x_{0,i})$$

" CONGELO $x_{0,1} \dots x_{0,i-1}, x_{0,i+1} \dots x_{0,N}$) e derivo rispetto a $x_{0,i}$ "

NOTA $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}^M$; in effetti se

$f = (f_1 \dots f_M)^t$ (devo metterla in colonna) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_i}(x_0) \end{pmatrix}$$

Se siamo in $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ di solito scrivo $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$ invece di $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ $\frac{\partial f}{\partial x_3}$

DUNQUE se $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)^t$ e se f è diff. $\Longrightarrow$

$$(***) \quad f'(x_0)(\vec{v}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_N \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) = df(x_0)\vec{v}$$

Questa proprietà $\uparrow$ si traduce nel fatto che

$$f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)\vec{v} \boxed{= J_f(x_0)\vec{v}}$$

$\leftarrow$ PRODOTTO MATRICIALE (righe x colonne)

dove $J_f(x_0)$ è la matrice avente come colonne $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}}_{J_f(x_0)} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = (***)$$

$M \times N$

M righe N colonne

Questa matrice $J_f(x_0)$ si chiama matrice Jacobiana di f nel pto x_0 (IL TUTTO FUNZIONA SE f è differenziabile)

Sempre nell'ipotesi che f sia differenziabile in x_0 possiamo definire "l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Si tratta di

L calcolata in $(x-x_0)$ Prodotto matriciale

$$y = L(x - x_0) = J_f(x_0)(x - x_0) \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

Il piano tangente "applicato" in $x_0, f(x)$ è invece

$$y = f(x_0) + L(x - x_0) = f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$$

ESEMPIO $\quad f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad$ definita su $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$f: A\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \qquad (N = 2 \quad M = 1)$.

Calcoliamo le derivate parziali: ce ne sono due

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \text{se } x^2 + y^2 < 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \text{se} \quad x^2+y^2<1$$

Prendiamo $P_0 = (x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\qquad P_0 \in \mathring{A} = \{x^2+y^2<1\}$
(considero $\Omega = \mathring{A}$)

Allora $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \dots = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

La matrice Jacobiana è $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (è 1×2)

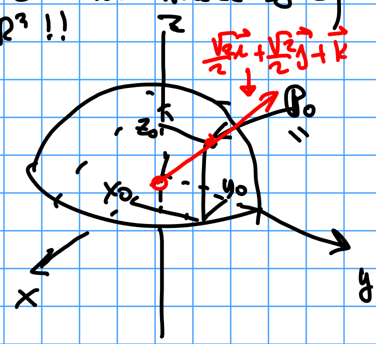
DIAMO PER BUONO CHE f è differenziabile in P_0 ??
(su questo torneremo – teorema del differenziale totale)

Allora il differenziale $df(P_0)$ è l'applicazione lineare associata a $J_f(P_0) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, cioè

$$df(P_0)(\vec{v}) = df(P_0)(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_x - \frac{\sqrt{2}}{2}v_y = f'(P_0)(\vec{v})$$

Se calcolo $z_0 := f(P_0) = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ho che
il punto $\underline{P_0} := \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in$ grafico di f (che è una mezza sfera in $\mathbb{R}^3$!!)

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \iff z \geq 0 \quad z^2+x^2+y^2 = 1$$



troviamo l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\underline{P_0}$:

$$z - z_0 = L(P-P_0) \iff$$

$$z - z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-x_0) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-y_0) \qquad x,y \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}(x-x_0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \text{ è perpendicolare a } \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

Prendiamo un vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$, per esempio $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Allora, come detto, abbiamo che

$$f'(P_0)(\vec{v}) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verifichiamo che torna con la definizione:

$$f'(P_0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t} = \varphi'(0) \quad \text{dove}$$

$$\varphi(t) = f(P_0 + t\vec{v}) \qquad \left(x = \frac{1}{2} + t \quad y = \frac{1}{2} - 2t\right)$$

Se $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, se $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} \Longrightarrow$

$$\varphi(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + t\cdot 1\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + t(-2)\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4} + t + t^2\right) - \left(\frac{1}{4} - 2t + 4t^2\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + t - 5t^2}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1 - 10t}{2\sqrt{1/2 + t - 5t^2}} \qquad \varphi'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

TORNA!

COME VEDO SE f è differenziabile ??

TEOREMA (del differenziale totale)

Supponiamo che f ammetta derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$ per le x in un intorno di x_0 (cioè $x \in B(x_0, r)$ con $r > 0$ opportuno). Supponiamo inoltre che $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$ siano continue in x_0 $\left(\lim_{x\to x_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad i = 1 \dots N\right)$. ALLORA

f è differenziabile in x_0

NON LO DIMOSTRIAMO

IL TEOREMA FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIA) → SE $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ non sono continue in x_0 NON SI PUÒ RICAVARNE che f non è differenziabile in x_0

DEF. · Dico che f è di classe $C^1(\Omega)$ se esistono $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per $i=1 \dots N$ e per ogni $x \in \Omega$ e tali derivate parziali sono continue

· Dico che f è $C^1(\bar{\Omega})$ se $f: \vec{\Omega} \to \mathbb{R}^M$, f è $C^1(\Omega)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ si prolungano a $\partial\Omega$, cioè

$$\exists \lim_{x \to \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad \forall \bar{x} \in \partial\Omega$$

$\uparrow$

lo indico con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$

ALLORA se f è $C^1(\Omega) \Rightarrow f$ è differenziabile in ogni $x \in \Omega$ e il differenziale $df(x)$ si rappresenta con la matrice Jacobiana $J_f(x)$

Se torniamo all'esempio $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ abbiamo

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}_{\text{CONTINUE IN } \{x^2+y^2<1\} =: \Omega}$$

$f: A(=:\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$; f è $C^1(\Omega)$ f NON è $C^1(\bar{\Omega})$

Infatti se $x_0^2+y_0^2 = 1$ $((x_0,y_0) \in \partial\Omega)$, almeno uno tra x_0 o y_0 è $\neq 0$. Se per esempio $x_0 \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} \begin{cases} +\infty & \text{se } x_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } x_0 < 0 \end{cases}$$

(dunque $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è prolungabile a (x_0, y_0))

IN SOSTANZA TUTTE LE FUNZIONI CHE SI COSTRUISCONO A PARTIRE DA FUNZIONI ELEMENTARI VANNO BENE

DEF. Nel caso $M=1$, cioè $f: \Omega \to \mathbb{R}$ (f scalare)

Chiamo gradiente di f in $x_0 \in \Omega$ il vettore

$$\nabla f(x_0) := J_f(x_0)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

(SUPPONGO f C^1)

Questo vettore è caratterizzato dal fatto che

$$(\nabla) \qquad \underbrace{f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}}_{\text{IMPORTANTE}} \qquad \left(= d_i f(x_0)(\vec{v})\right)$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI $\nabla f(x_0)$

Dalla proprietà (∇) segue:

(a) $$f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|\vec{v}\| \qquad (\text{Schwartz})$$

In particolare $$f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \qquad \forall \vec{v} \in S = \{\|\vec{v}\| = 1\}$$

(b) Supponiamo che $\nabla f(x_0) \neq 0$. Se prendo $\hat{v} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$. Questo $\hat{v} \in S$ e si ha

$$f'(x_0)(\hat{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \hat{v} \qquad (\text{per la formula } (\nabla))$$

$$= \nabla f(x_0) \circ \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$$

Ho trovato un vettore $\hat{v}$ di norma 1 per cui

$$f'(x_0)(\hat{v}) = \|\nabla f(x_0)\|$$

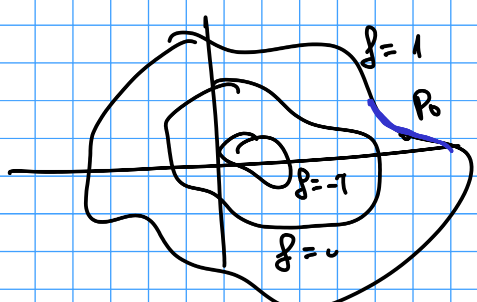
DUNQUE (a) e (b) ci dicono che

$$\|\nabla f(x_0)\| = \max_{\hat{v} \in S} f'(x_0)(\hat{v})$$

mentre $\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è il vettore $\hat{v}$ in S su cui si realizza il $\max_{\hat{v} \in S} f'(x_0)(\hat{v})$ $\underline{\sim}$ la direzione del gradiente è la "direzione di massima salita di f"

<u>OSS.</u> Dato $f : \Omega \to \mathbb{R}$ posso considerare le "curve di livello"

$$f^c = \{ x \in \Omega : f(x) = c \} \qquad c \in \mathbb{R} \text{ assegnato}$$



Supponiamo che $P_0 \in f^c$ e supponiamo di avere una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to f^c$ tale che $\gamma(0) = P_0$. Supponiamo anche che $\exists\ \vec{v} := \gamma'(0)$ ($\vec{v}$ è una tangente alla superficie di livello f^c)

Allora $f(\gamma(t)) = c$ ($\gamma(t)$ si muove dentro f^c)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))}_{\nabla f(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)} = 0 .$$

(LO VEDIAMO LA PROSSIMA VOLTA)

(se $\gamma(t) = P_0 + t\vec{v}$ è la definizione)

Mettiamo $t=0$ $\Rightarrow$

$$\nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = 0$$

$\nabla f(x_0)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti alla superficie di livello f^c