Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18 05/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TANGENTI A UN INSIEME (GENERICO)

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in A$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

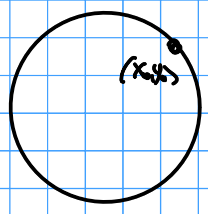
Diremo che $\vec{v}$ è tangente ad A in x_0 se esiste una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ (con $\varepsilon > 0$), tale che

IMPORTANTE ($\gamma(t) \in A$ se $-\varepsilon < t < \varepsilon$)

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma'(0) = \vec{v}$$

ESEMPI $A = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, e prendo $P_0 = (x_0, y_0) \in A$

Quali sono le direzioni tangenti ad A in P_0



Ricordo che c'è una curva γ che descrive A (cioè tale che A = sostegno di γ). Infatti posso considerare $\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$ $\left(= (\cos(t), \sin(t)) \right)$
$0 \le t \le 2\pi$.

Se $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ so che $\exists$ $t_0 \in [0, 2\pi[$ tale che $\gamma(t_0) = P_0$

PER APPLICARE LA DEFINIZIONE "TRASLO" i tempi e definisco

$\gamma_0(t) = \gamma(t+t_0)$. IN QUESTO MODO $\gamma_0(0) = \gamma(t_0) = P_0$

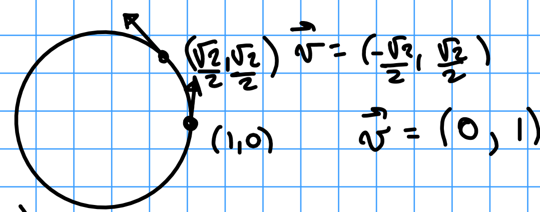
Chi è $\gamma_0'(0) = \gamma'(t_0) = (-\sin(t_0), \cos(t_0))$

Ricordo che $P_0 = (x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \iff \cos(t_0) = x_0, \ \sin(t_0) = y_0$

e dunque $\gamma_0'(0) = \gamma'(t_0) = (-y_0, x_0)$.

DUNQUE IL VETTORE $(-y_0, x_0)$ è tangente ad $A = \{x^2+y^2=1\}$

nel punto (x_0, y_0) $\quad (x_0^2+y_0^2=1)$



Ne segue che se $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(-y_0 \vec i + x_0 \vec j)$ è tangente

In effetti vale un fatto generale: Se $\vec v$ è tangente ad A in x_0 allora $\lambda \vec v$ è tangente ad A in x_0. Infatti se $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ è tale che $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec v$, allora posso definire

$\tilde\gamma(t) := \gamma(\lambda t)$. $\tilde\gamma :]-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}[\to A$ (CASO $\lambda \neq 0$)

$\tilde\gamma(0) = \gamma(0) = x_0$, $\quad \tilde\gamma'(0) = \lambda \gamma'(\lambda \cdot 0) = \lambda \vec v$

Il caso con $\lambda = 0$ è ovvio: In effetti $\vec v = \vec 0$ è sempre tangente (a qualunque A!) Infatti se prendo $\gamma(t) = x_0$ $\Rightarrow$

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec 0$.

NON È DETTO CHE $\vec v_1$, $\vec v_2$ tangenti $\Rightarrow$ $\vec v_1 + \vec v_2$ tangente

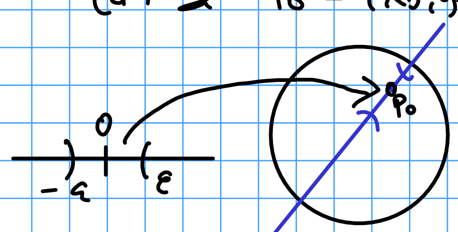
CONTINUANDO L'ESEMPIO DI PRIMA: $A = \{x^2+y^2=1\}$

Si può dim che se $\vec v \neq \lambda(-y_0, x_0)$ $\Rightarrow$ $\vec v$ NON È TANGENTE

(FIDIAMOCI!!)

ESEMPIO $A = \{x^2+y^2 \leq 1\}$. Conviene dividere i punti di A in due sottoinsiemi: $\mathring{A}$ e ∂A. $\mathring{A} = \{x^2+y^2<1\}$ e $\partial A = \{x^2+y^2=1\}$

(a) Se $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathring{A}$ OGNI $\vec v \in \mathbb{R}^2$ è tangente!!



Infatti dato $\vec v \in \mathbb{R}^2$ posso considerare la curva

$\gamma(t) = x_0 + t\vec v$ (descrive la retta per x_0 con direttrice $\vec v$)

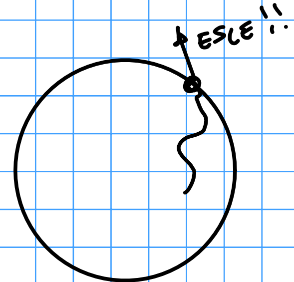
Dato che $P_0 \in \mathring{A} \Rightarrow \gamma(t) \in A$ se $|t| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. DUNQUE $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$. $\gamma(0) = x_0$. Infatti $\gamma'(t) = \vec{v}$ da cui $\gamma'(0) = \vec{v}$. DUNQUE $\vec{v}$ è tangente!!

OSS. Questo ragionamento va bene per qualunque insieme A:
Se $x_0 \in \mathring{A} \Rightarrow$ ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ è tangente ad A in x_0

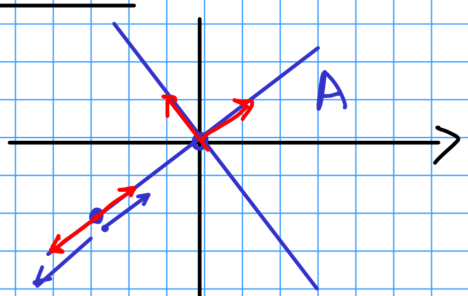
(b) Dato che $\{x^2+y^2=1\} \subset \{x^2+y^2 \leq 1\} \Rightarrow$ se prendo $P_0 \in \partial A$ $P_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow$ il vettore $(-y_0, x_0)$ è tangente (lo era di prima, va ancora bene! (IN SOSTANZA i vettori tangenti alla circonferenza sono tangenti al cerchio)

DI NUOVO DICO (senza dim) che il cerchio non ha altre direzioni tangenti oltre a $\{\lambda(-y_0, x_0) \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ (se $x_0^2+y_0^2=1$)

IDEA



ESEMPIO $A = \{x^2 - y^2 = 0\} = \{x = y\} \cup \{x = -y\}$



Si vede (non lo dimostro) che se $P_0 = (0,0) \Rightarrow$ i vettori $\vec{v}$ tangenti ad A in $\vec{P}_0$ sono
$\lambda(\vec{i} + \vec{j})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ oppure
$\lambda(\vec{i} - \vec{j})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

IN QUESTO CASO ho che $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$ e
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$

sono entrambi tangenti, ma la somma $\vec{v} := \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{i}$
NON È TANGENTE

NOZIONI DI DIFFERENZIABILITÀ IN PIÙ VARIABILI

AVREMO SEMPRE UN DOMINIO $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ che prendiamo APERTO e una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ (M, N interi — il caso $N=1$ è il "caso di f scalare")

DUNQUE
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_N) \\ f_M(x_1 \dots x_N) \end{pmatrix}$$

D'ORA IN POI CONVIENE USARE LA CONVENZIONE PER CUI I VETTORI SONO COLONNE

INOLTRE CI SARÀ SPESSO UN PUNTO $x_0 \in \Omega$.

<u>Def.</u> (DERIVATA DIREZIONALE) Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ definisco la derivata direzionale di f in x_0 lungo $\vec{v}$ come

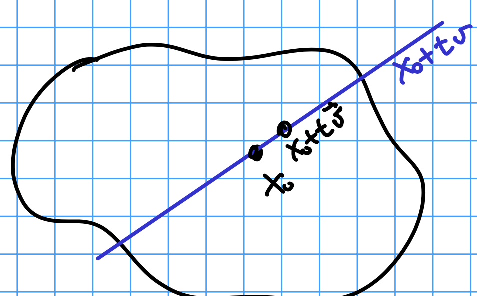
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \qquad \text{(se esiste)}$$

che indico con $f'(x_0)(\vec{v})$ (QUANDO ESISTE). Si può anche scrivere che

$$f'(x_0)(\vec{v}) = \varphi'(0) \quad \text{dove} \quad \varphi(t) = f(x_0 + t v)$$

$$\left(\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \right)$$

Dunque $f'(x_0)(\vec{v})$ è la derivata "della restrizione di f alla retta $x_0 + t\vec{v}$"



<u>OSS.</u> ① Se $\exists\, f'(x_0)(\vec{v}) \Rightarrow \exists\, f'(x_0)(\lambda\vec{v}) = \lambda f'(x_0)(v)$

Infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda \vec{v}) - f(x_0)}{t} =$$ (cambio di variabile $s = \lambda t$ — CASO $\lambda \neq 0$)

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{s/\lambda} = \lambda \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+s\vec{v}) - f(x_0)}{s} = \lambda f'(x_0)(\vec{v})$$

② Qualunque sia f esiste $f'(x_0)(\vec{0}) = 0$ (OVVIO DALLA DEF.)

ESEMPIO $\quad f(x,y) = 4x^2 - y^2 \qquad P_0 = (x_0, y_0) = (1,-1)$

Prendiamo un generico vettore $\vec{v} = (v_x, v_y)^t = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

Vediamo se esiste, e quanto fa, $f'(P_0)(\vec{v})$ (QUI $N=2$, $M=1$)

Devo fare

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+tv_x, -1+tv_y) - f(1,-1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4(1+tv_x)^2 - (-1+tv_y)^2 - 4\cdot 1^2 + 1^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4(\cancel{1} + 2tv_x + t^2v_x^2) - (\cancel{1} - 2tv_y + t^2v_y^2) - \cancel{4} + \cancel{1}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8tv_x + 2tv_y + 4t^2v_x^2 - t^2v_y^2}{t} = 8v_x + 2v_y$$

CIOÈ $\quad \boxed{f'(1,-1)(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) = 8v_x + 2v_y}$

OSS. NON È DETTO CHE L'ESISTENZA DI TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI IMPLICHI LA CONTINUITÀ DI f !!

Per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prendiamo $P_0 = (0,0)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq 0$. Vediamo se esiste $f'(P_0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(P_0+t\vec{v}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(tv)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_x)(tv_y)}{t^2v_x^2 + t^2v_y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2}\frac{1}{t} \begin{cases} 0 & \text{se } v_xv_y = 0 \ (v_x=0 \text{ o } v_y=0) \\ \text{NON ESISTE } (+\infty/-\infty\ldots) \end{cases}$$

DUNQUE $\exists\, f'(\vec{0})(\vec{v})$ solo se $\vec{v} = (v_x, 0)$ oppure $\vec{v} = (0, v_y)$

e in tali casi vale 0

$\xleftarrow{\quad} f(t v_x, t v_y)$ ($v_x v_y \neq 0$)

NON HA DERIVATA

<u>Altro esempio</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prendo $P_0 = 0 = (0,0)$ e $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq (0,0)$). Cerchiamo $f'(0)(\vec{v})$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{(t v_x)^2 (t v_y)}{(t v_x)^2 + (t v_y)^4} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^3 v_x^2 v_y}{t(t^2 v_x^2 + t^4 v_y^4)} = \lim_{t \to 0} \frac{v_x^2 v_y}{v_x^2 + t^2 v_y^4}$$

$t \neq 0$ e dunque il denominatore è $\neq 0$ e dunque posso scrivere questa espressione

$$= \begin{cases} \dfrac{v_x^2 v_y}{v_x^2} = v_y & \text{caso } \boxed{v_x \neq 0} \\ 0 & \text{caso } v_x = 0 \end{cases}$$

$\left(\text{se } v_x = 0 \Rightarrow \dfrac{v_x^2 v_y}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = 0 \,!! \text{ per } t \neq 0 \right)$

DUNQUE

$$f'(0,0)(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_x = 0 \\ v_y & \text{se } v_x \neq 0 \end{cases} \quad \left(f'(0)(\vec{v}) \text{ esiste per ogni } \vec{v} \right)$$

- VEDIAMO SE <u>f è continua in $(0,0)$</u> $\left(\Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \right)$

se $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

HO AGGIUNTO y^4 a x^2 $\quad \left(x^2 |y| \le (x^2 + y^4)|y| \right)$

MI ACCORGO CHE

$$|f(x,y)| \le \frac{\cancel{(x^2 + y^4)}|y|}{\cancel{x^2 + y^4}} = |y|$$

So che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = |0| = 0 \Rightarrow$ anche $|f(x,y)| \to 0$

se $(x,y) \to (0,0)$

f è continua !!

Altro esempio $\quad f(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^2 + y^4} \quad (f(0,0) = 0)$

Di nuovo cerco le derivate direzionali $f'(0,0)(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) =$
$(\vec{v} \neq (0,0))$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_x)(tv_y)^2}{(tv_x)^2 + (tv_y)^4} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \quad \left(\text{in questo caso } f(t\vec{v}) = 0 \text{ per } t \neq 0\right) \end{cases}$$

ANCHE IN QUESTO CASO $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per ogni $\vec{v}$.

VEDIAMO SE f è continua, cioè se

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$??

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^4}$$

Mi metto sulla curva $x = t^2$, $y = t$ cioè $\gamma(t) = (t^2, t)$

Chiaramente $\gamma(t) \to (0,0)$ se $t \to 0$. Se avessi $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$ avrei $f(\gamma(t)) \to 0$ per $t \to 0$.

MA

$$f(\gamma(t)) = \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (\text{e non tende a } 0 \text{ se } t \to 0)$$

DUNQUE f non è continua in $(0,0)$

Questo ultimo esempio mostra che l'esistenza di $f'(P_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$ NON IMPLICA f continua in P_0 !!!

OSS. Se $N = M = 1$ $\qquad f'(x_0)(v) = f'(x)\,\vec{v}$

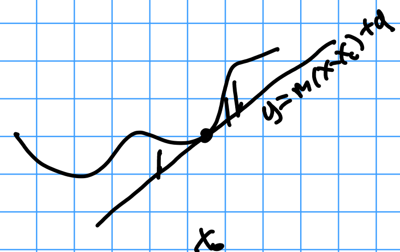
e l'esistenza della derivata direzionale $\Longleftrightarrow$ f è derivabile in x_0

DIFFERENZIALE $\sim$ APPROSSIMAZIONE DI f con qualcosa di lineare.

OSS. Nel caso $N = M = 1$ si ha che

$\exists\, f'(x_0) \Longleftrightarrow$ esiste una retta $y = m(x-x_0) + q$ tale che

$$f(x) = m(x-x_0) + q + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{infinitesimo di ordine superiore a } x-x_0} \Longleftrightarrow$$



E' AUTOMATICO che $q = f(x_0)$ (la retta passa per $(x_0, f(x_0))$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - m(x-x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se passiamo in più dimensioni la cosa equivalente da dire è la seguente

Def. Dico che f è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0_M = \underbrace{(0 \dots 0)}_{M}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^M}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

(in altri termini deve valere $f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + o(\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^N})$)

In questo caso dico che L è "un" differenziale di f in x_0.

<u>Teorema</u> Se f è differenziabile in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0.

<u>Dim</u> Sia L come sopra. Allora

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - L(x-x_0) + L(x-x_0) =$$

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|}}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{\|x-x_0\|}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{L(x-x_0)}_{\downarrow \atop 0} \to 0$$

Dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ✱