Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17   04/11/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CONVENZIONE

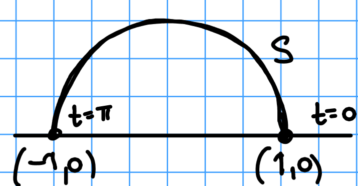
$$\vec f(x,y) = f_1(x,y)\,\vec i + f_2(x,y)\,\vec j = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure in 3D} \quad \vec i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Esempio

$$\vec f(x,y) = y^2\,\vec i + x\,\vec j = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$$

$S = \{ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0 \}$



S è un arco di curva semplice perché lo posso parametrizzare con la curva $\gamma(t) = \cos(t)\,\vec i + \sin(t)\,\vec j \qquad 0 \leq t \leq \pi$

$$\left(\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec i + \cos(t)\,\vec j \right)$$

Questa γ induce su S il verso per cui il primo estremo di S è il punto $(1,0)$, il secondo estremo è il punto $(-1,0)$

VOGLIO CALCOLARE $\int_S \vec f \cdot d\vec s$. Per questo devo fare

$$\int_0^{\pi} \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi} \left(\sin(t)^2\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right)\cdot\left(-\sin(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi} -\sin^3(t) + \cos^2(t)\,dt = -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3(t)\,dt = \int_0^{\pi}(1-\cos^2(t))\underbrace{\sin(t)\,dt}_{-ds} \qquad s=\cos(t) \quad ds = -\sin(t)\,dt$$

$$= \int_1^{-1}(1-s^2)(-ds) = \int_{-1}^{1}(1-s^2)\,ds = \left[s-\frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}+0$$

VEDIAMO CHE IL RISULTATO NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

Posso parametrizzare S con $\gamma(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{j} \quad -1\le t\le 1$

(S è il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad -1\le x\le 1$).

$$\gamma'(t) = \vec{i} + \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}\vec{j} \qquad (\text{se } -1<t<1 \ \ldots)$$

non è proprio come nella def - ma funziona

Notiamo che $\gamma(-1) = (1,0)$ $\gamma(-1) = (-1,0)$ dunque anche questo γ è "coerente" con il verso scelto all'inizio)

Facciamo di nuovo l'integrale con quest'altra γ.

$$\int_S \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{1}\underbrace{\left((1-t^2)\vec{i}+t\vec{j}\right)}_{\vec{f}(\gamma(t))}\cdot\left(\vec{i}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{j}\right)dt =$$

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt - \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \qquad \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = (\text{trucco dell'altra volta}) = -\int_{-1}^{1} t\,\frac{d}{dt}\sqrt{1-t^2} = (\text{per parti})$$

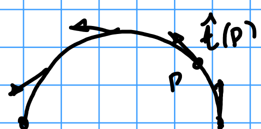
$$-\left[t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

DUNQUE $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\Big[\arcsin(t)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

TORNA CON IL CALCOLO PRECEDENTE !!

OSS (riguardo al verso). Abbiamo detto che S "orientato" corrisponde a prendere (S, P, Q) dove P e Q sono i due estremi di S (qui S è un arco semplice)

ALTERNATIVAMENTE Si può dire che S è un arco orientato se per ogni punto $P \in S$ è definito un versore $\hat{t}(P)$ con $\|\hat{t}(P)\| = 1$, $\hat{t}(t)$ tangente a S in P, $\hat{t}$ CONTINUO



DUNQUE un arco orientato è una coppia $(S, \hat{t})$ dove S è un arco e $\hat{t}$ è campo di versori tangenti (come detto sopra)

In effetti, se S è un arco so che esiste una parametrizzazione $\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^N$ (C^1, iniettiva, $\gamma' \neq 0$). Posso allora definire

$$\hat{t}(P) = \frac{\gamma'(t_P)}{\|\gamma'(t_P)\|}$$

dove t_P è l'unico $t \in [0,b]$ per cui $\gamma(t) = P$

DUNQUE ogni parametrizzazione induce un verso.

LE PARAMETRIZZAZIONI SI DIVIDONO IN DUE CLASSI $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tali che: se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}_1$ / $\gamma_1\, \gamma_2 \in \mathcal{P}_2$ allora per ogni $P \in S$

$$\frac{\gamma_1'(t_{P,1})}{\|\gamma_1'(t_{P,1})\|} = \frac{\gamma_2'(t_{P,2})}{\|\gamma_2'(t_{P,2})\|}$$

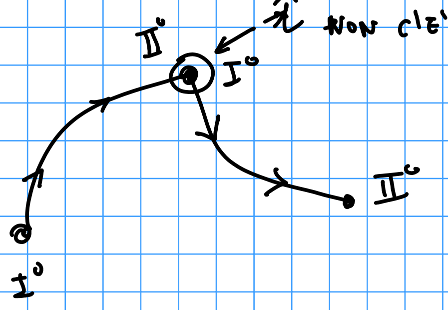
(dove $\gamma_1(t_{P,1}) = P = \gamma_2(t_{P,2})$)

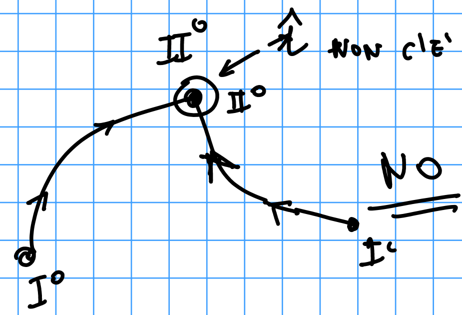
mentre se $\gamma_1 \in \mathcal{P}_1$ $\gamma_2 \in \mathcal{P}_2$ VALE LA RELAZIONE CON IL MENO

INOLTRE DUE PARAMETRIZZAZIONI STANNO NELLA

STESSA CLASSE $\Longleftrightarrow$ ORDINANO NELLO STESSO MODO GLI ESTREMI

"QUANDO INCOLLO È MEGLIO USARE GLI ESTREMI"





SE CAMBIO VERSO DI S l'integrale di II° specie cambia SEGNO

COMPITINO LUNEDÌ 25/11

ore 16.30 AULA B11
