Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16 30/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

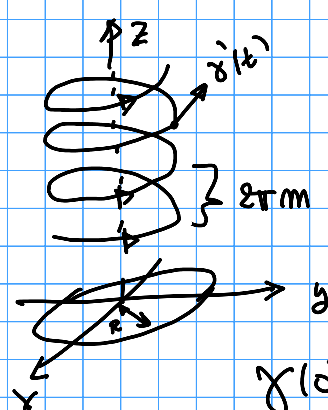
Qualche altro esempio

- ELICA (già vista)

$\gamma(t) := (R\cos(t), R\sin(t), m\,t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$R>0$ $m>0$

m "velocità rispetto a z"



Se "faccio un giro"

$\gamma(0) = (R, 0, 0)$
$\gamma(2\pi) = (R, 0, 2\pi m)$

- Quanto è la lunghezza del tratto di elica tra 0 e 2π ?:

calcolo $\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), m)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t) + m^2} = \sqrt{R^2+m^2}$

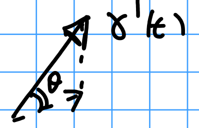
(la velocità è costante – NON DIPENDE DA t) $\Rightarrow$

$$\ell(\gamma|_{[0,2\pi]}) = \int_{\gamma|_{[0,2\pi]}} ds = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+m^2} = 2\pi\sqrt{R^2+m^2}$$

- Qual è l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il piano (x,y). Dovrei ragionare come segue: prendo $\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), m)$.

Prendo la proiezione di $\gamma'(t)$ su piano (x,y) e trovo

$\Pi_{xy}(\gamma'(t)) = (-R\sin(t), R\cos(t), 0)$



trovo $$\cos(\theta) = \frac{\gamma'(t)\cdot \Pi_{xy}(\gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|\,\|\Pi_{xy}(\gamma'(t))\|} = \frac{R^2\sin^2(t)+R^2\cos^2(t)+0}{\sqrt{R^2+m^2}\ \sqrt{R^2}} =$$

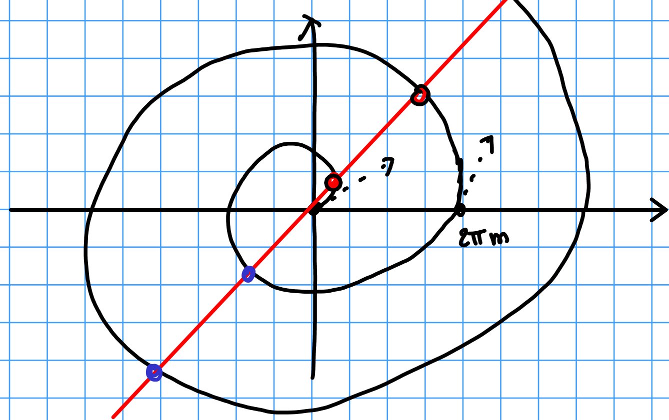
$$\frac{R^2}{R\sqrt{R^2+m^2}} \Rightarrow \boxed{\cos(\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2+m^2}}}$$

Esempio: varie "spirali" (CURVE IN $\mathbb{R}^2$)

1 (spirale archimedea)

$\gamma(t) = m\,t\,(\cos(t), \sin(t))$ $\qquad t \geq 0$

$$\gamma'(t) = m\underbrace{(\cos(t), \sin(t))}_{\hat\gamma} + mt\underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\hat\gamma'} \qquad \hat\gamma\cdot\hat\gamma' = 0$$



$\gamma(0) = 0 \qquad \gamma'(0) = (m, 0)$

$\gamma(2\pi) = 2\pi m\,(1, 0)$

$\gamma'(2\pi) = (m, 2\pi m)$
$= m(1, 2\pi)$

N.B. se $\hat\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow \gamma(t) = m\,t\,\hat\gamma(t)$ dunque

$\gamma'(t) = m\,\hat\gamma(t) + m\,t\,\hat\gamma'(t)$. Dato che $\|\hat\gamma\| = 1 \Rightarrow \hat\gamma\cdot\hat\gamma' = 0$

- La spirale "HA PASSO COSTANTE". Se prendo una retta

$y = \alpha x$ $(ax+b=0)$ passanti per l'origine, e cerco le intersezioni della spirale con la retta trovo la condizione

$$mt\sin(t) = \alpha\, mt\cos(t) \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \alpha \iff \tan(t) = \alpha$$

$$t = t_k := \underbrace{\arctan(\alpha)}_{\in]-\pi/2, \pi/2[} + k\pi$$

Se cerco due punti "consecutivi" e dallo stesso lato rispetto a $(0,0)$ devo prendere due t_k che differiscono per 2π

Calcoliamo la distanza da $\gamma(t)$ e $\gamma(t+2\pi)$ =

$$\| \gamma(t+2\pi) - \gamma(t) \|^2 =$$

$$\Big\| \underbrace{\big(m(t+2\pi)\cos(t+2\pi), m(t+2\pi)\sin(t+2\pi)\big)}_{\gamma(t+2\pi)} - \underbrace{\big(mt\cos(t), mt\sin(t)\big)}_{\gamma(t)} \Big\|^2$$

$$\big(m(t+2\pi) - mt\big)^2\cos^2(t) + \big(m(t+2\pi) - m(t)\big)^2\sin^2(t) = 4 m^2\pi^2$$

PASSO DELLA SPIRALE

- LUNGHEZZA DEL PRIMO GIRO Devo calcolare

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \| m\hat\gamma(t) + mt\hat\gamma'(t) \|\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{m^2\|\hat\gamma(t)\|^2 + m^2t^2\|\hat\gamma'(t)\|^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{m^2R^2 + m^2R^2t^2}\, dt =$$

(se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali $\Rightarrow \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = (\vec{v}+\vec{w})(\vec{v}+\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$

$$= mR\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$ (l'abbiamo visto ieri – lo faccio in un altro modo)

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^{2\pi} t\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) dt =$$

$$\left(\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arcsinh}(t) \quad \text{NOTO} \right) = \operatorname{arcsinh}(2\pi) + \int_0^{2\pi} t \, \frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} \, dt =$$

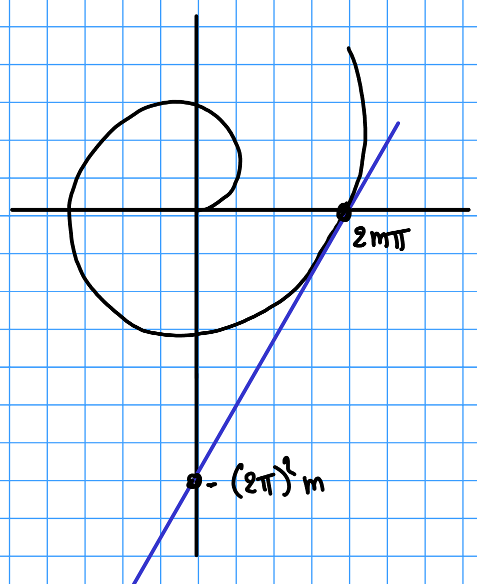
(Noto che $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{1+t^2}$, infatti $\frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}$)

(per parti) $= \operatorname{arcsinh}(2\pi) + \left[t\sqrt{1+t^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{1+t^2} \, dt \iff$

$$2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} \, dt = \operatorname{arcsinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\ell(\gamma|_{[0,2\pi]}) = \frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}}{2}}$$

\-



Cerchiamo la retta tangente nel punto $(2\pi m, 0)$ (applicata nel punto)

In forma parametrica ho

$$r(s) = \gamma(2\pi) + s\gamma'(2\pi) = (2\pi m, 0) + s(m, 2\pi m) = m(2\pi + s, 2\pi s)$$

In altri termini

$r(s) = (x(s), y(s))$ dove $\underline{x(s) = m(2\pi + s)}$, $\underline{y(s) = 2\pi m s}$,

Posso trovare una "forma cartesiana della retta: (perché sono in $\mathbb{R}^2$)

Ricavo s: $s = \frac{x - 2\pi m}{m} \Rightarrow y = 2\pi m \frac{(x - 2\pi m)}{m} =$

$2\pi(x - 2\pi m) \leftarrow$ retta tangente che cercavo

Noto che la retta ha coeff. angolare 2π (. . _)

<u>Spirale logaritmica</u> <u>OSS.</u> Posso chiamare spirale una curva

del tipo $\rho(t)\,\hat{\gamma}(t)$ dove $\hat{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$

dove $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente. Nel caso di prima $\rho(t) = mRt$

PRENDIAMO INVECE $\rho(t) = e^{\beta t}$, dunque

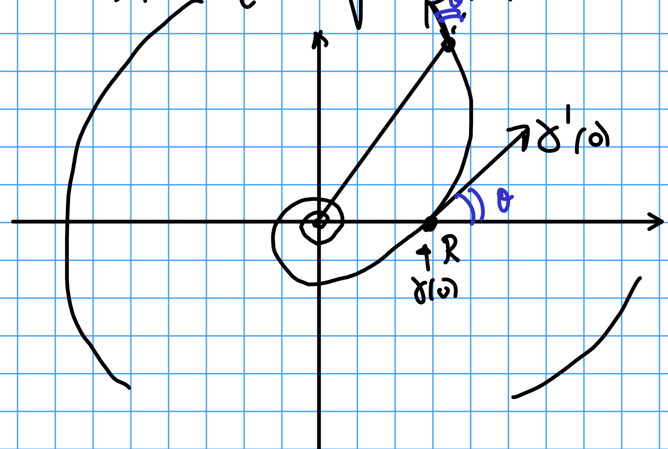
$$\gamma(t) = R e^{\beta t} (\cos(t), \sin(t)) = e^{\beta t} \hat{\gamma}(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma'(t) = R\left(\beta e^{\beta t} \hat{\gamma}(t) + e^{\beta t} \hat{\gamma}'(t)\right)$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = R e^{\beta t} \cdot \sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$\gamma'(0) = R\left[\beta(1,0) + (0,1)\right]$$

$$R(\beta, 1)$$



• Vediamo l'angolo θ tra $\gamma'(0)$ e l'asse x. Devo fare

$$\frac{\gamma'(0) \cdot \pi_x \gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\| \, \|\pi_x \gamma'(0)\|} =$$

$$\pi_x \gamma'(0) = (R\beta, 0)$$

$$\gamma'(0) = (R\beta, R)$$

$$\frac{R^2 \beta^2 + 0}{R\sqrt{1+\beta^2} \cdot R\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \cos(\theta)$$

Facciamo vedere che l'angolo tra $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ è costantemente uguale a θ $\left(\text{dove } \cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$. Facciamo cioè vedere che

$$\frac{\gamma(t) \cdot \gamma'(t)}{\|\gamma(t)\| \, \|\gamma'(t)\|} \text{ è costante rispetto a } t$$

$\hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma}' = 0$

$$\frac{\left(R e^{\beta t} \hat{\gamma}(t)\right) \cdot \left(R\beta e^{\beta t} \hat{\gamma}(t) + \cancel{R e^{\beta t} \hat{\gamma}'(t)}\right)}{R e^{\beta t} \; R e^{\beta t} \sqrt{\beta^2 + 1}} =$$

$$\frac{R e^{\beta t}\; R\beta e^{\beta t}}{R e^{\beta t}\; R e^{\beta t}\sqrt{\beta^2+1}} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}$$ NON DIPENDE DA t !!

- Vediamo che la parte di curva con $t \le 0$ HA LUNGHEZZA FINITA

$\iff \int_{-\infty}^{0} \|\gamma'(t)\|\, dt < +\infty$. In EFFETTI:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R e^{\beta t}\sqrt{\beta^2+1}\, dt = R\sqrt{\beta^2+1}\left[\frac{e^{\beta t}}{\beta}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta} R$$

OSS. Si potrebbe dare una nozione di "arco di curva", definito come insieme e non come funzione. SI DOVREBBE FARE COSÌ:

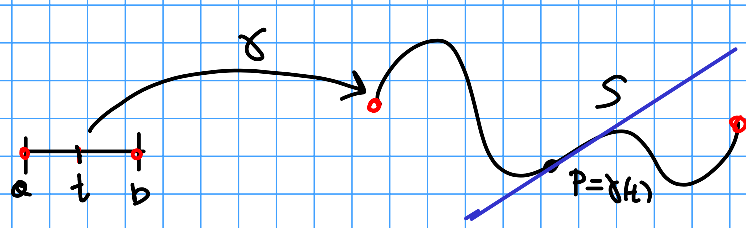
Def. Prendo S in $\mathbb{R}^N$. Dico che è un "arco di curva semplice" se $\exists\ \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ tale che

- γ è una curva C^1
- $\gamma([a,b]) = S$
- γ è <u>INIETTIVA</u>
- $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t$ (dunque γ è una curva regolare)

UNA TALE γ si chiama parametrizzazione per S.

Data questa γ posso chiamare

- Estremi di S: i due punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$
- la retta tangente a S in un punto P di S. Per questo, fissato P trovo $t \in [a,b]: \gamma(t) = P$ (t è unico per l'iniettività)



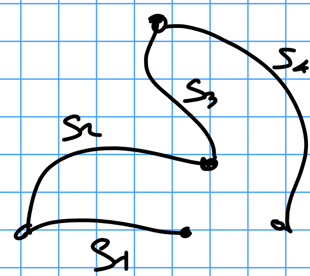
e definisco la retta $r(s) := s\gamma'(t) \, (+p)$ (passa per p)

la tolgo se voglio la retta che passa per zero

FATTO Se cambio parametrizzazione la retta tangente e gli estremi NON CAMBIANO (visto ...)

DOPO DI CHE POSSO DEFINIRE GLI ARCHI DI CURVA INCOLLANDO ARCHI DI CURVA SEMPLICI

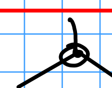
$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots S_k$$



dove ogni S_i è arc. di c. semplice

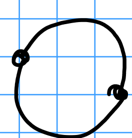
che si incollano agli estremi

(CON QUALCHE AVVERTENZA: PER OGNI ESTREMO SI INCOLLANO AL PIÙ DUE CURVE).



NO

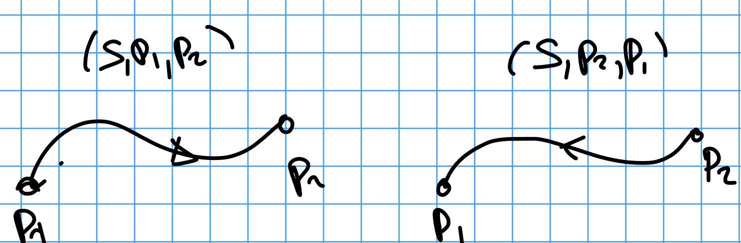
- IN QUESTO MODO RECUPERO LE CURVE CHIUSE



POSSO ANCHE DEFINIRE GLI ARCHI SEMPLICI CON VERSO

QUESTO CORRISPONDE A UN ARCO S in cui decido chi è il primo estremo e chi è il secondo estremo.

A rigore dovrei dare una terna $(S, P_1, P_2) \neq (S, P_2, P_1)$



Se (S, P_1, P_2) è un arco con verso allora le parametrizzazioni che descrivono S si dividono in due classi:

(1) le $\gamma:[a,b]\to S$ con $\gamma(a)=P_1$ $\gamma(b)=P_2$

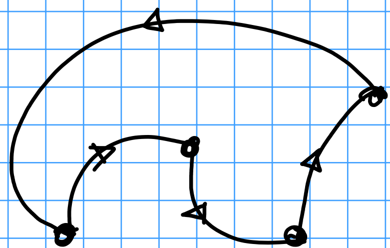
(2) le $\gamma:[a,b]\to S$ con $\gamma(a)=P_2$ $\gamma(b)=P_1$

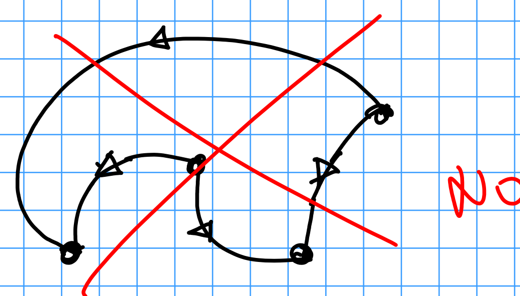
Quelle di tipo (1) si dice che mantengono il verso

Quelle di tipo (2) si dice che invertono il verso.

Questa nozione si estende ad archi non semplici:

UN ARCO ORIENTATO È UN ARCO S che ha una decomposizione $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ come della sopra IN CUI OGNI S_i HA UN VERSO, E QUESTI SONO "COERENTI"





Def. (INTEGRALE DI II^a SPECIE)

Supponiamo che (S, P, q) sia un arco semplice orientato (cioè con un verso) in $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $\vec{f}: S \to \mathbb{R}^N$ continua ($\vec{f}$ è un "campo di vettori")

dimensione in partenza = dim. in arrivo

Definisco

$$\int_S \vec{f}\cdot d\vec{s} := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt$$

a rigore dovrei scrivere (S,P,q)

dove γ è una parametrizzazione per S che mantiene il verso (cioè $\gamma(a)=P$, $\gamma(b)=q$) (tutte le γ danno lo stesso risultato – SI DIMOSTRA)

Se S è un arco orientato definisco

$$\int_S \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \vec{f}\cdot d\vec{s} \quad \left(S = S_1 \cup \dots \cup S_k \text{ con i versi giusti} \right)$$