Claudio Saccon (*)

Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15   29/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

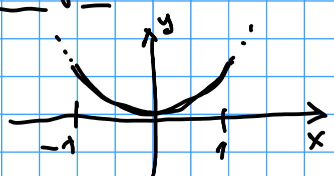
Int. curvilineo di I° specie (integrale di una funzione scalare)

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Qui $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva C^1. $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ continua.

Chiamo lunghezza di γ $\quad \int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Esempio Considero il grafico della parabola $y = x^2$ $\quad -1 \le x \le 1$



Chiaramente posso descrivere questo grafico con il sostegno della curva $\gamma(t) = (t, t^2)$

$-1 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = 1^2 + (2t)^2$

$= 1 + 4t^2$ mentre $\|\gamma'(t)\|^2 = \sqrt{1+4t^2}$. Se applico la formula

$$\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\, dt \qquad 2t = \sinh(s) \Rightarrow 2\,dt = \cosh(s)\, ds$$

CALCOLI RIFATTI

$$1 + 4t^2 = 1 + \sinh^2(s) = \cosh^2(s) \qquad \left(\cosh^2 - \sinh^2 = 1\right)$$

dunque $\ell(\gamma) = \int_{-A}^{A} \cosh(s)\, \frac{1}{2} \cosh(s)\, ds = \int_{0}^{A} \cosh^2(s)\, ds$

dove $A = \sinh^{-1}(2)$ $\quad (\sinh(A) = 2)$ $\quad \Rightarrow$

$$\ell(\gamma) = \int_0^A \frac{\cosh(2s)+1}{2}\, ds = \quad \left(\left(\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2s}+e^{-2s}+2}{4} = \frac{\cosh(2s)+1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sinh(2s)}{2} + s\right]_0^A = \frac{1}{2}\left[\sinh(s)\cosh(s) + s\right]_0^A =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sinh(A)\sqrt{1+\sinh^2(A)} + A\right) = \frac{1}{2}\, 2\sqrt{1+4} + \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)}{2}$$

$$\boxed{\ell(\gamma) = \frac{2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)}{2}} \qquad \left(\simeq 2.579 > 2 \,!!\right)$$

DEFINIZIONE SOTTO

• Vediamo il baricentro di γ. Si ha

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x\, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+4t^2}\, dt = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma y\, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1+4t^2}\, dt = \quad \left(\begin{array}{l}\text{come prima } 2t = \sinh(s) \\ A = \sinh^{-1}(2)\end{array}\right)$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{-A}^{A} \left(\frac{\sinh(s)}{2}\right)^2 \cosh(s)\, \frac{1}{2}\cosh(s)\, ds =$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma)}\, \frac{1}{4} \int_0^A \sinh^2(s)\cosh^2(s)\, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)}\, \frac{1}{16} \int_0^A \sinh^2(2s)\, ds =$$

$$\frac{1}{16}\, \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_0^A \frac{\cos(4s)-1}{2}\, ds = \quad \left(\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = \frac{\cosh^2(x)-1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma)}\, \frac{1}{32} \left[\frac{\sinh(4s)}{4} - s\right]_0^A = \frac{1}{\ell(\gamma) 32} \left(\frac{\sinh(4A)}{4} - A\right) =$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma) 32} \left(\frac{\sinh(2A)\cosh(2A)}{2} - A\right) =$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma) 32} \left(\sinh(A)\cosh(A)\left(\cosh^2 A + \sinh^2 A\right) - A\right) =$$

$$\frac{1}{\ell(\gamma)}\, \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5}\,(5+4) - A\right) = \frac{1}{\ell(\gamma) 32} \left(18\sqrt{5} - A\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{16}\,\frac{18\sqrt{5} - \sinh^{-1}(2)}{2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)}} \simeq 0{,}41 \qquad (0 < \bar{y} < 1)$$

Baricentro di una curva

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva, se $\sigma(x,y,z)$ è una funzione positiva che mi dà la densità nel pto (x,y,z) (che varia sul sostegno di γ). Allora

$$\text{massa} = \int_\gamma \sigma \, ds$$

Il baricentro è il punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ che risulta dall'integrale

$$\bar{P} = \frac{1}{\int_\gamma \sigma \, ds} \underbrace{\int_\gamma (x,y,z)\,\sigma(P)\, ds}_{\text{vettore di componenti}} = \frac{1}{\int_\gamma \sigma ds}\left(\int_\gamma x \overset{\sigma}{\vee} ds , \int_\gamma y \overset{\sigma}{\vee} ds , \int_\gamma z \overset{\sigma}{\vee} ds \right)$$

Nel caso in cui $\sigma = 1$ trovo

$$\frac{1}{\ell(\gamma)}\left(\int_\gamma x \, ds , \int_\gamma y \, ds , \int_\gamma z \, ds \right) \leftarrow$$ CENTRO GEOMETRICA DI γ

Se la curva è bidimensionale è lo stesso - manca la z

Esempio la parabola di prima $\to$ CONTI FATTI SOPRA

I CONTI SONO STATI RIFATTI RISPETTO A LEZIONE
E SI TROVANO DOPO IL CALCOLO DELLA LUNGHEZZA

CONFRONTARE L'INTEGRALE CON I CAMBI DI PARAMETRO

Ricordo che γ_1 è riparametrizzato di γ se

$$\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \qquad \text{dove}$$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N \quad \gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^N \quad \varphi : [c,d] \to [a,b]$

φ continua e biettiva. PERÒ se considero curve C^1 φ deve essere C^1. Se considero curve regolari φ deve essere C^1 con $\varphi' \neq 0$.

φ si chiama "cambio di parametro"

È ovvio che in questa situazione γ_1 e γ hanno lo stesso sostegno

PROP. Se γ è C^1 e γ_1 è riparametrizzata di γ, allora (qualunque sia f) si ha:

$$\int_\gamma f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds .$$

Dim $\displaystyle\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_c^d f(\gamma_1(s)) \| \gamma_1'(s) \| \, ds =$ (def di integrale)

$\left(\text{MA se } \gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \Rightarrow \gamma_1'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) \right)$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \| \varphi'(s) \gamma'(\varphi(s)) \| \, ds =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\|\,|\varphi'(s)|\,ds =$$

N.B. φ bigettiva e C^1 $\Rightarrow$ φ str. monotona $\Rightarrow$ φ' ha segno costante

CASO $\varphi' \geq 0$ uso $t = \varphi(s)$ $\quad \varphi'(s)\,ds = dt$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,ds$$

CASO $\varphi' \leq 0$ in questo caso $|\varphi'(s)| = -\varphi'(s)$, uso sempre $t = \varphi(s)$

$$= -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = -\int_b^a f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,ds$$

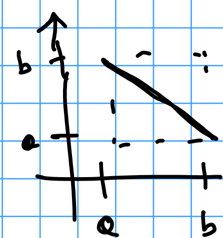
TORNA

OSS. Se cambio verso a γ l'integrale non cambia.

PRECISAMENTE dato $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ posso definire

$\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(b - s + a)$

(è ottenuta mediante il cambio di parametro $\varphi(s) = b + a - s$)



$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$$

($\tilde{\gamma}$ è la curva "opposta" che ha lo stesso sostegno ma ha gli estremi scambiati)

PROP. Se γ è regolare si può sempre trovare una "parametrizzazione in lunghezza d'arco" cioè una γ_1 riparametrizzata di γ t.c.

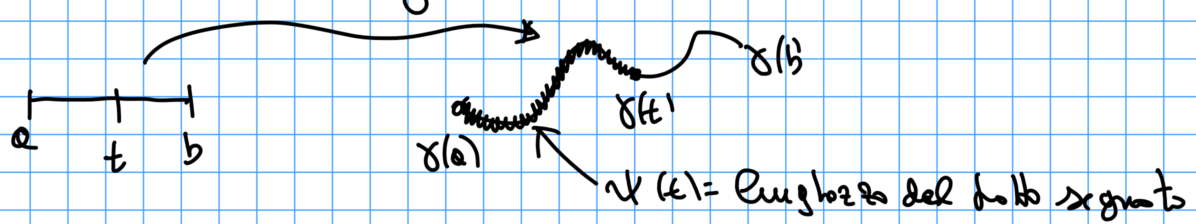
$$\gamma_1 : [0, \ell(\gamma)] \to \mathbb{R}^N \qquad \|\gamma_1'(s)\| = 1 \quad \forall s$$

($\Rightarrow$ lunghezza di γ_1 tra 0 e $\ell < \ell(\gamma)$ è proprio ℓ)

Dim. Definisco $\psi : [a,b] \to [0, L]$ $\qquad L = \ell(\gamma)$

$$\psi(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau \quad \left(= \ell\left(\gamma|_{[a,t]}\right)\right)$$

se $t=a$ ho $\psi(a)=0$ se $t=b$ ho $\psi(b)=L$ $\left(=\int_a^b \|\gamma'(\tau)\|d\tau\right)$



Se ho che $\exists\ \psi'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0 \ \forall t$. In particolare ψ è strettamente crescente e dunque è bigettiva da $[a,b] \to [0,L]$

Posso considerare $\varphi := \psi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$

$$\varphi \in C^1 \qquad \varphi'(s) = \frac{1}{\psi'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} > 0$$

DUNQUE φ è un buon cambio di parametro. Poniamo

$$\gamma_1(s) := \gamma(\varphi(s)).$$

Allora
$$\gamma_1'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}$$

$$\Rightarrow \quad \|\gamma_1'(s)\| = 1 \quad !!!$$

GENERALIZZAZIONI

① Se γ è C^1 a tratti, cioè se $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ con γ_i curve C^1 consecutive, posso definire l'integrale

$$\int_\gamma f\, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f\, ds$$

DUNQUE HO IL SEGUENTE FATTO

Se γ_1 e γ_2 sono C^1 (a tratti) consecutive $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$$

② Posso anche fare l'integrale di I° specie di una funzione vettoriale $\xrightarrow{\text{CONTINUA}}$ $\vec{f} : \gamma([0,b]) \to \mathbb{R}^M$, semplicemente dicendo

$$\left(\int_\gamma \vec{f} \, ds \right)_j = \int_\gamma f_j \, ds \qquad j = 1 \dots M$$

VALE LA PROPRIETÀ

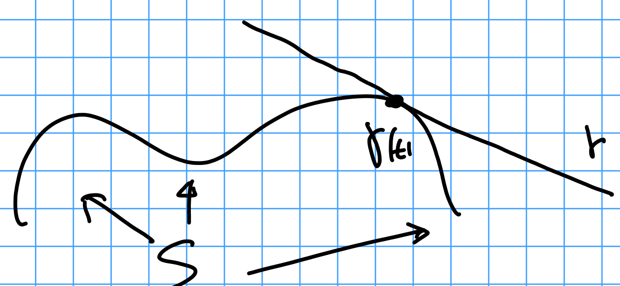
$$\left\| \int_\gamma \vec{f} \, ds \right\|_{\mathbb{R}^M} \leq \max_{x \in \gamma([0,b])} \| f(x) \|_{\mathbb{R}^M} \cdot \ell(\gamma)$$

(è di facile verifica.)

Sempre riguardo ai cambi di parametro:

RICORDO CHE, se γ è una curva regolare, se chiamo $S = \gamma([0,b])$ se prendo $t \in [0,b]$ $\Rightarrow$ definisco la retta tangente a S in $\gamma(t)$ come $\{ \lambda \gamma'(t) \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$. Se la voglio applicata nel punto considero

$$r(\lambda) = \gamma(t) + \lambda \gamma'(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



IMPONIAMO CHE γ SIA INIETTIVA (dunque γ è bigettiva tra $[a,b]$ e S — γ NON si autointerseca)

Allora per ogni $P \in S$ $\exists$ UNICO t : $\gamma(t) = P$

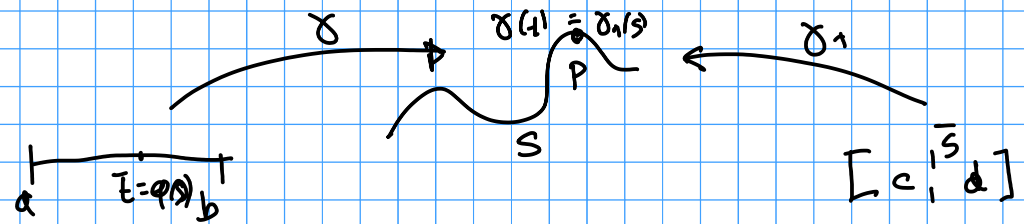
In questo caso dirò ?? che la retta $\{ \lambda \gamma'(t), \lambda \in \mathbb{R} \}$ è la retta tangente a S nel punto P.

Perché questo sia ragionevole devo mostrare che, se

$\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è un'altra curva, regolare, iniettiva con lo stesso sostegno S, la retta tangente è la stessa

Ammettiamo dunque che $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sia iniettiva e regolare e che $\gamma_1([c,d]) = \gamma([a,b])$.

Dico che c'è un cambio di parametro φ di classe C^1 con $\varphi' \neq 0$. tale che $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$.



Posso (devo!) definire $\varphi(s) = \gamma^{-1}(\gamma_1(s))$

Ci SAREBBE DA VEDERE CHE φ è C^1 e $\varphi' \neq 0$ (NON LO DIMOSTR.)

Allora dato $P \in S$ trovo $\bar{s} \in [c,d]$ tale che $P = \gamma_1(\bar{s})$

Analogamente ho che, se $\bar{t} = \varphi(\bar{s})$, si ha $P = \gamma(\bar{t})$

Allora $\gamma_1'(\bar{s}) = \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) \Big|_{s=\bar{s}} = \gamma'(\varphi(\bar{s}))\varphi'(\bar{s}) = \gamma'(\bar{t})\varphi'(\bar{s})$

DUNQUE $\gamma_1'(\bar{s}) =$ multiplo (non nullo) di $\gamma'(\bar{t})$

$\Rightarrow$ le rette generate da $\gamma_1'(\bar{s})$ e $\gamma'(\bar{t})$ SONO LE STESSE

MORALE Le nozioni di retta tangente e di integrale non cambiano se cambio la parametrizzazione.

DATA PROBABILE COMPITINO $\to$ ULTIMO LUNEDÌ DI NOVEMBRE verso le 16.30 – 17.00