Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14 28/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Proprietà delle curve (rispetto alla derivazione). $\left(\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N\right)$

- Se γ_1, γ_2 $(: [a,b] \to \mathbb{R}^N)$ sono derivabili (o C^1) $\Rightarrow$ $\gamma_1 + \gamma_2$ è derivabile (C^1) e $(\gamma_1 + \gamma_2)' = \gamma_1' + \gamma_2'$
- Se γ è derivabile e $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow$
  $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$
  $\lambda\gamma$ $(: [a,b] \to \mathbb{R}^N)$ è derivabile e $(\lambda\gamma)' = \lambda'\gamma + \lambda\gamma'$
  HA SENSO (λ scalare γ vettore).
- Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ sono derivabili $\Rightarrow$ $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ $(: [a,b] \to \mathbb{R})$ è derivabile $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)' = \gamma_1' \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2'$

ESEMPIO Se γ è una curva C^1 da $[a,b] \to \mathbb{R}^N$ posso definire $p(t) := \|\gamma(t)\|^2$ $\quad p : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Se γ è derivabile $\Rightarrow$ p è derivabile e $\boxed{p' = 2\gamma \cdot \gamma'}$.

cioè $\quad \frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = 2\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t)$

Infatti: $\quad \|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t)\cdot\gamma(t)$.

Se per esempio $\|\gamma(t)\|$ è costante $\Rightarrow \gamma(t)\cdot\gamma'(t)=0$

(più in generale se $\|\gamma(t)-P_0\| =$ costante $\Rightarrow (\gamma(t)-P_0)\gamma'(t)=0$

La derivata $\gamma'(t)$ è perpendicolare a $\gamma(t)$ $(\gamma(t)-P_0)$

<u>CURIOSITÀ</u> Si può definire il "piano osculatore" a γ in $\gamma(t)$ come il piano generato da $\gamma'(t)$ (o da $\hat{t}$) e da

$$\hat{n}(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) = \hat{t}(t) \qquad (\|\hat{t}(t)\|=1)$$

PURCHÈ $\gamma'(t)\neq 0$ (e $\hat{n}$ venga $\neq 0$)

Infatti da quanto detto prima $\hat{t}\cdot\hat{n}=0 \Leftrightarrow \gamma'\cdot\hat{n}=0$

$\hat{n}$ è un "versore normale" a γ in $P=\gamma(t)$

<u>PROPRIETÀ</u> Se γ è C^1 allora:

$$\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\| \leq \max_{a\leq t\leq b}\|\gamma'(t)\|\,|t_2-t_1| \quad \forall t_1,t_2\in[a,b]$$

<u>Dim.</u>

$$\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\| = \frac{d}{dt}\sqrt{\|\gamma(t)\|^2} = \frac{2\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t)}{2\sqrt{\|\gamma(t)\|^2}} =$$

$$\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\cdot\gamma'(t)$$

(a rigore questo va bene se $\gamma'(t)\neq 0$)
però la cosa si aggiusta...

Dunque

$$\left|\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|\right| \leq \left|\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\cdot\gamma'(t)\right| \leq \underbrace{\left\|\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right\|}_{=1}\|\gamma'(t)\|$$

$$\leq \|\gamma'(t)\| \quad \forall t$$

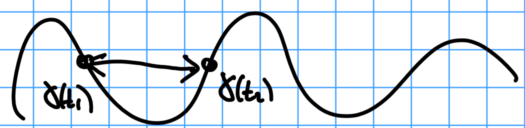
Analogamente $\boxed{\frac{d}{dt}\|\gamma(t)-P_0\| \leq \|\gamma'(t)\|}$ (stessi calcoli)

Allora se fisso t_1 applico Lagrange alla funzione

$\varphi(t) := \|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|$

$$\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_2} = \varphi'(t) \leq \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \varphi'(t) \leq \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| - 0 \leq \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \|\gamma'\| \, |t_2 - t_1| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|\gamma'\| \, |t_2 - t_1|$$



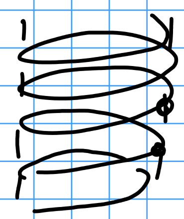
$$\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| \leq L \, |t_2 - t_1| \qquad \forall t_2, t_1 \in [a, b]$$

dove L può essere preso come $\max_{[a,b]} \|\gamma'\|$

__OSS.__ NON VALE PERÒ UN TEOREMA DI LAGRANGE PER LE CURVE.

Per esempio consideriamo la "spirale" $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$$



Non è vero che $\dfrac{\gamma(t_2) - \gamma_1(t_1)}{t_1 - t_2} = \gamma'(t)$ per t intermedio

NO

Se prendo $t_1 = 0$ $t_2 = 2\pi$

$\gamma(t_1) = (1, 0, 0)$ $\qquad \gamma(t_2) = (1, 0, 2\pi)$

$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) = (0, 0, 2\pi)$

$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$

Per nessuno t si ha $-\sin(t) = 0$, $\cos(t) = 0$) dunque non c'è messano t per cui

$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) = (0, 0, 2) = \gamma'(t)$

Def (<u>INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE</u>)

Dato $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1.

Sia $S = \gamma([a,b])$ (il sostegno di γ, $S \subset \mathbb{R}^3$), sia $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Definisco
$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\|}_{\text{continua in } t \Rightarrow \text{integrabile}} \, dt$$

Nel caso $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ allora $\int_\gamma 1 \, ds$ si chiama "lunghezza di γ"
$$\ell(\gamma) := \int_\gamma 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Per esempio la lunghezza della circonferenza descritta da $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, è data da
$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 1$$