Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 23/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

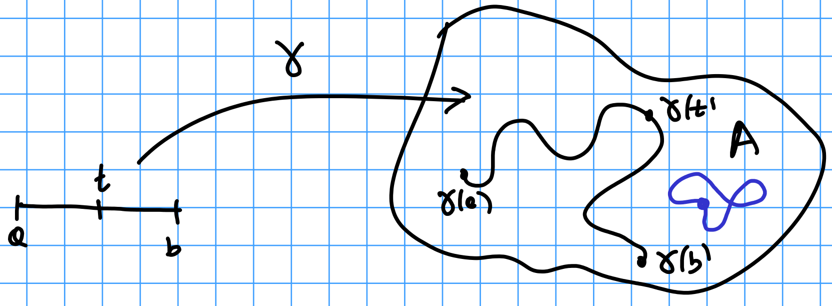
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CURVE

Def. Chiamo "CURVA" in $\mathbb{R}^N$ (o in un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$) una applicazione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ ($\gamma : I \to A$) dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Di solito $I = [a,b]$. CHIAMO

- "SOSTEGNO" DI γ l'immagine $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^N$ ($\subset A$)
- "ESTREMI" DI γ: i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ (se $\gamma(b) \neq \gamma(a)$)
- Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ dico che γ è una "curva chiusa" (in questo caso è più ragionevole dire che γ non ha estremi)

IDEA:



Posso immaginare t come un tempo e γ come la traiettoria percorsa da un punto (che al tempo t si trova in $\gamma(t)$)

ESEMPIO se $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ è definita da

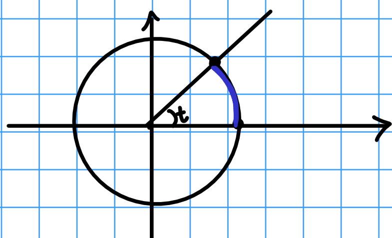
$$\boxed{\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))}$$

allora γ è una curva chiusa dato che $\gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi)$.

Il sostegno di γ è l'insieme $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$.

Per vedere questo ultimo fatto possiamo notare che

- $\forall t\in[0,2\pi]$ se prendo $x=\cos(t)$, $y=\sin(t) \Rightarrow x^2+y^2=1$
- Viceversa se (x,y) è tale che $x^2+y^2=1$ è ben noto che esiste un angolo t per cui $x=\cos(t)$ $y=\sin(t)$ $t\in[0,2\pi[$



N.B. Ho chiamato curva la "legge del moto" non la traiettoria

Ci possono essere molte curve aventi lo stesso sostegno

Per esempio $\boxed{\gamma_1(t) = (-\sin(t), \cos(t))}$, $0\le t\le 2\pi$, è un'altra curva avente come sostegno la circonferenza.

DIREMO che γ è una "parametrizzazione" di

$C = \{\gamma(t): t\in[a,b]\}$ ← sostegno. Per esempio

↙ ESEMPI DI PRIMA

γ e γ_1 sono delle parametrizzazioni della circonferenza

Def. Dato che una curva γ è una funzione (di una variabile) posso dire che

- γ è continua ($\Leftrightarrow$ ogni componente γ_i è continua $i=1..N$)
- γ è derivabile ($\Leftrightarrow$ ogni γ_i ($i=1..N$) è derivabile)
- γ è di classe $C^k(]a,b[)$ se γ è derivabile k-volte in $]a,b[$ e tutte queste derivate sono continue
- γ è di classe $C^k([a,b])$ se γ è $C^k(]a,b[)$ e ogni derivata $\gamma^{(m)}$ ($m=0..k$) si prolunga con continuità su $[a,b]$

Dunque, per ogni $m = 0 .. k$, esistono

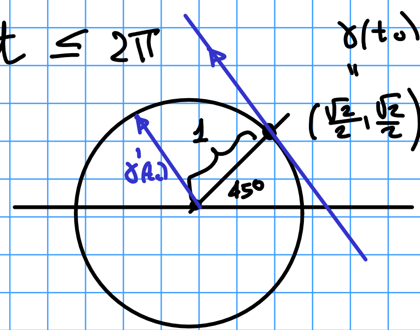
$$\left(\gamma^{(m)}(a) :=\right) = \lim_{t\to a^+} \gamma^{(m)}(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to b^-} \gamma^{(m)}(t) \quad \left(=: \gamma^{(m)}(b)\right)$$

Def. Dico che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è "regolare" se $\gamma \in C^1([a,b])$ e $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Oss. La derivata $\gamma'(t)$ della curva γ nel punto t rappresenta "un vettore tangente" a γ nel punto $\gamma(t)$ A PATTO CHE $\gamma'(t) \neq 0$

Per esempio se considero la curva di prima:

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



È chiaro che γ è C^1 e che

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Prendiamo $t_0 = \frac{\pi}{4}$. $\Rightarrow \gamma(t_0) = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \gamma'(t_0) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$$

Nota che $\|\gamma'(t_0)\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac12 + \frac12} = \sqrt1 = 1$

e $\gamma'(t) \cdot \gamma(t) = -\sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) = 0$!!

Se prendo $\{\underbrace{\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)s}_{\text{descrizione parametrica di una retta}} : s \in \mathbb{R}\}$ = retta tangente a γ in $\gamma(t_0)$ se $\gamma'(t_0) \neq 0$

descrizione parametrica di una retta, cioè è un'altra curva che ha come sostegno la retta

$$r(s) = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Al variare di s $r(s)$ descrive una retta. Se $s=0$ $r(0) = \gamma(t_0)$ — $\gamma'(t_0)$ fa da "direzione" della retta. TUTTO OK se $\gamma'(t_0) \neq 0$

QUESTI DISCORSI FANNO CAPIRE CHE L'ESISTENZA DELLA RETTA TANGENTE HA BISOGNO DELLA REGOLARITÀ

ESEMPIO Considero $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t^2, t^3) \qquad -1 \le t \le 1$$

. γ è C^1 e $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$

. γ non è chiusa; gli estremi di γ sono $\gamma(-1) = (1,-1)$ e $\gamma(1) = (1,1)$

. CHI È IL SOSTEGNO DI γ ?? INDICO $C := \{(t^2, t^3) : -1 \le t \le 1\} =$

$C_1 \cup C_2$ dove $C_1 = \{(t^2, t^3) : -1 \le t \le 0\}$, $C_2 = \{(t^2, t^3) : 0 \le t \le 1\}$

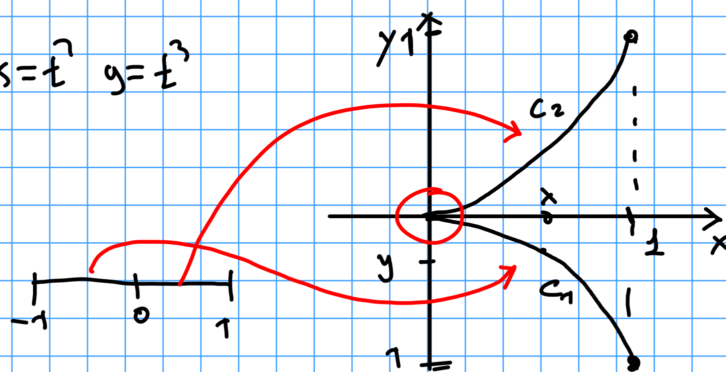
- Chi è C_1 ?? Se $-1 \le t \le 0$, $x = t^2$ $y = t^3$ $\Longrightarrow 0 \le x \le 1$

e $y = -|t|^3 = -(t^2)^{\frac{3}{2}} = -x^{3/2}$

Dunque C_1 è il grafico di $\varphi_1(x) = -x^{3/2}$ $\quad 0 \le x \le 1$

- Chi è C_2 : se $0 \le t \le 1$, $x = t^2$ $y = t^3$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1$, $y = x^{3/2}$



- Possiamo notare che C_1 / C_2 è il sostegno di

$$\gamma_1(t) := (t^2, t) \qquad -1 \le t \le 0$$
$$\gamma_2(t) := (t^2, t) \qquad 0 \le t \le 1$$

Dal disegno si capisce che il punto $(0,0) = \gamma(0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

è "una cuspide" - NON SEMBRA NATURALE UNA RETTA TANGENTE

PERÒ γ è C^1 MA $\gamma'(0) = (0,0)$

- POTREI DESCRIVERE C_1 e C_2 con altre parametrizzazioni :

$\hat{\gamma}_1(x) = (x, -x^{3/2}) \qquad 0 \le x \le 1$ $\quad$ (HO USATO x IN LUOGO

$\hat{\gamma}_2(x) = (x, x^{3/2}) \qquad 0 \le x \le 1$ $\quad$ DI t . . .

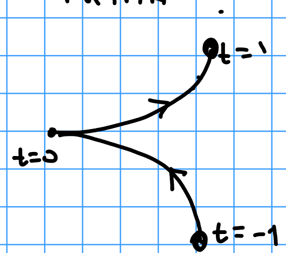
È chiaro che $\hat{\gamma}_1$ ha come sostegno C_1 / $\hat{\gamma}_2$ ha sostegno C_2

Se faccio così ho:

$$\hat\gamma_1'(x) = \left(1, -\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right) \qquad \hat\gamma_2'(x) = \left(1, \tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \hat\gamma_1'(0) = (1, 0) = \hat\gamma_2'(0)$$

PRIMA



$\gamma(-1) = (1, -1)$

$\gamma(0) = (0, 0)$

$\gamma(1) = (1, 1)$

L'ESTREMO SX di γ è $(1,-1)$

L'ESTREMO DX di $\gamma = (1,1)$

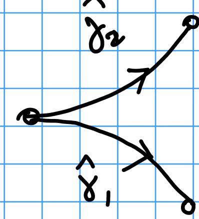
SE PERò DIVIDO γ in γ_1 e γ_2

γ_1 ha estremo sx $(1,-1)$ e estremo dx $(0,0)$

γ_2 ha estremo sx $(0,0)$ e estremo dx $(1,1)$

$\gamma'(0) = \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = (0,0)$

ORA



$\hat\gamma_1$ ha estremo sx $(0,0)$, estremo dx $(1,-1)$

$\hat\gamma_2$ ha estremo sx $(0,0)$, estremo dx $(1,1)$

$\hat\gamma_1$ è DISCORDE CON γ_1 (discorsi intuitivi)

$\hat\gamma_2$ è CONCORDE CON γ_2

Dovrei "girare il verso" di $\hat\gamma_1$ per poter "incollare" $\hat\gamma_1$ e $\hat\gamma_2$

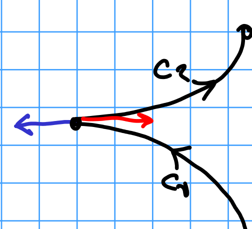
Per esempio potrei cambiare la def. di $\hat\gamma_1$ ponendo

$$\hat\gamma_1(x) = \left((1-x), -(1-x)^{\frac{3}{2}}\right) \qquad 0 \le x \le 1$$

Si vede facilmente che la nuova $\hat\gamma_1$ ha come sostegno C_1

Ma $\hat\gamma_1'(x) = \left(-1, \tfrac{3}{2}\sqrt{(1-x)}\right)$ dunque

$\hat\gamma_1'(1) = (-1, 0)$



Nell'origine $\hat\gamma_1$ e $\hat\gamma_2$ hanno derivate $(\neq 0)$ opposte

MORALE: Non basta γ C^1 per dire che il sostegno è "LISCIO"

CI VUOLE γ regolare !!

L'ESEMPIO CI MOTIVA ALCUNE DEF.

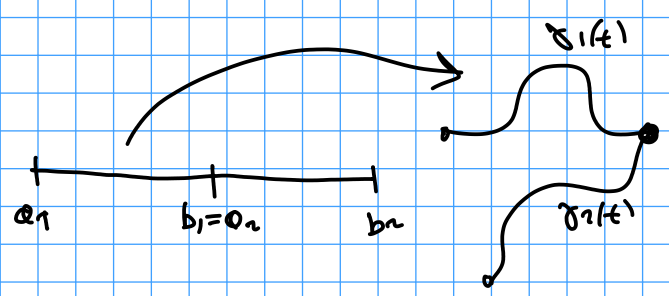
Def. Se $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, di classe C^1 $\Rightarrow$ posso costruire la curva "grafico di g": $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ def. da

$$\gamma(t) = (t, g(t)) \qquad a \le t \le b$$

È chiaro che γ è una curva C^1, che il sostegno di γ è proprio il grafico di g $(\{(x,y): y=g(x)\})$. Inoltre γ è regolare e $(\gamma'(t) = (1, g'(t))$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(1, g'(t))\| = \sqrt{1+g'(t)^2} \quad (\geq 1 \quad \forall t)$$

Def. Date due curve $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}^n$ $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$, dico che γ_1 e γ_2 sono "consecutive" se $b_1 = a_2$ (poi questa condizione la toglieremo...) e $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



Se ciò avviene posso "incollare" γ_1 e γ_2 ottenendo la curva $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 : [a_1, b_2] \to \mathbb{R}^2$ def. da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \le t \le b_1 \\ \gamma_2(t) & a_2 \le t \le b_2 \end{cases}$$

Se γ_1 e γ_2 sono continue $\Rightarrow$ $\gamma_1 \vee \gamma_2$ è continua

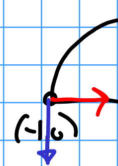
Se γ_1 e γ_2 sono derivabili non è detto che $\gamma_1 \vee \gamma_2$ lo sia

NON È DETTO che $\gamma_1'(b_1) = \gamma_2'(a_2)$ $\leftarrow$ se questo avviene $\Rightarrow$ $\gamma_1 \vee \gamma_2$ è C^1

Def. Dico che γ è C^1 a tratti (regolare a tratti) se γ è ottenuta incollando un numero finito di curve C^1 (curve regolari) CONSECUTIVE a DUE a DUE

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_K$$

Per esempio



← è sostegno di una curva chiusa regolare a tratti.

Potrei prendere $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $\quad 0 \leq t \leq \pi$

$\approx$ $\gamma_2(t) = (-1,0) + t(2,0)$ (vado da $(-1,0)$ a $(1,0)$)

$0 \leq t \leq 1$

effettivamente ho $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(0)$ (estremo dx di γ_1 = estremo sx di γ_2)

NON È VERA LA PROPRIETÀ SU t : $\pi \neq 0$. Allora posso ridefinire γ_2:

$$\gamma_2(t) = (-1,0) + (t-\pi)(2,0) \qquad \pi \leq t \leq \pi+1$$

(ho "traslato" il parametro) ORA γ_1 e γ_2 sono consecutive $\Rightarrow$ posso definire $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ e vedo che il sostegno di γ è l'unione dei sostegni di γ_1 / γ_2 $\Rightarrow$ è quello che volevo.

γ è una curva regolare a tratti, dato che sia γ_1 che γ_2 sono regolari.

γ NON È C^1 dato che se $t = \pi$

$$\gamma_1'(\pi) = (0,-1) \neq \gamma_2'(0) = (2,0)$$

Def. Siano date $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^N$, continue. Dico che γ_1 è una "riparametrizzata" di γ se esiste $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ BIGETTIVA E CONTINUA :

$$\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \qquad \forall s \in [c,d]$$

In questo caso φ viene detta "cambio di parametro"

Naturalmente se γ_1 e γ sono C^1 $(C^1$ a tratti$)$ φ dovrà anche essere C^1 (C^1 a tratti)

PER ESEMPIO le curve γ_1 e $\hat{\gamma}_1$ (quello giusto) e γ_2 $\hat{\gamma}_2$ dell'esempio di prima

sono legate da cambio di parametro:

$$\gamma_2(t) = (t^2, t^3) \qquad 0 \leq t \leq 1$$
$$\hat{\gamma}_2(t) = (t, t^{3/2})$$

è chiaro che posso prendere $\varphi(t) = t^2$ $\quad \varphi : [0,1] \to [0,1]$
e allora $\gamma_2(t) = \hat{\gamma}_2(\varphi(t))$.
(IN MODO SIMILE SI FA PER γ_1 $\hat{\gamma}_1$)

OVVIAMENTE se γ_1 è una riparametrizzata di γ $\Rightarrow$
- γ è una riparametrizzata di γ_1 (uso φ^{-1})
- γ_1 e γ hanno lo stesso sostegno.