Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12 22/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

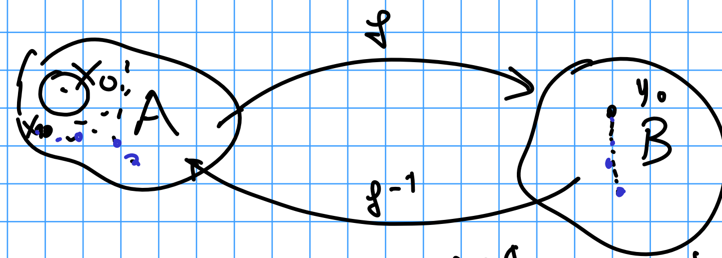
<u>Teorema</u> (continuità di f^{-1} se f è definita su un compatto)
Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è COMPATTO ($\Leftrightarrow$ A chiuso e limitato), se $f : A \to \mathbb{R}^M$, f continua e iniettiva su A. Poniamo $B := f(A)$. Allora $f^{-1} : B \to A$ è ben definita. ALLORA

(1) B è un compatto di $\mathbb{R}^M$;

(2) f^{-1} è continua su B

<u>Dim.</u> La (1) l'abbiamo già dimostrata. Per la (2) prendo $y_0 \in B$ e dimostro che f^{-1} è continua in y_0.
Noto che $y_0 \in B \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ per un (unico) $x_0 \in A$
Se y_0 è isolato in B f^{-1} è continua.
Se y_0 è di acc. per B devo dim. che $\boxed{\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)}$
$\Leftrightarrow$ per ogni successione (y_n) in B con $y_n \to y_0$ si ha
$f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$

SE NON FOSSE VERO



CI SAREBBE UNA (y_n)

con $y_n \in B \ \forall n$, $y_n \to y_0$, ma $f^{-1}(y_n) \not\to x_0$

Chiamo $x_n := f^{-1}(y_n)$ $\quad (x_n \not\to x_0)$

Usando la def. di limite posso dim. che esiste (x'_n) estratta da (x_n) ed esiste $r>0$ tale che $x_n \notin B(x_0,r)$.

Dato che A è compatto esiste una (x''_n) estratta da (x'_n) (e dunque estratta da x_n) che converge a un punto $x_1 \in A$

DUNQUE $x''_n \to x_1$; ma $x''_n \notin B(x_0,r) \Rightarrow x_1 \neq x_0$

(da $(x_n) = (f^{-1}(y_n))$ si estrae una (x''_n) che tende a $x_1 \neq x_0$)

Se chiamo $y''_n = f(x''_n)$ questa (y''_n) è un'estratta da (y_n). Per continuità $y''_n = f(x''_n) \to f(x_1)$

$f(x_1)=f(x_0)$

e d'altra parte (essendo un'estratta) $y''_n \to y_0 = f(x_0)$

QUI C'È UN ASSURDO dato che ho trovato due punti distinti x_0 e x_1 in cui $f(x_0)=f(x_1)$ IMPOSSIBILE se f è iniettiva. #

ESEMPIO Prendiamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

È chiaro che F è continua per tutte le proprietà viste.

CHI È $F(\mathbb{R}^2)$ = l'immagine di $\mathbb{R}^2$ tramite F cioè

$$\{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R} : (\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\xi,\eta) = F(x,y)) \}$$

Per vederlo dobbiamo fissare (ξ,η) e risolvere il sistema (se è possibile)

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2 \\ \eta = 2xy \end{cases}$$

ci chiediamo per quali (ξ, η) il sistema è risolubile – ed eventualmente quante soluzioni (x, y) ci sono

- Caso $\boxed{\eta = 0}$ $\Rightarrow$ $x = 0$ oppure $y = 0$

  - se $\xi = 0$ devo avere entrambe $x = 0$ e $y = 0$
    Dunque l'unica sol. (x, y) con $(\xi, \eta) = (0, 0)$ è $(0, 0)$
  - se $\xi > 0$ $\Rightarrow$ deve essere $y = 0$ e dunque trovo due soluzioni $(\pm\sqrt{\xi}, 0)$
  - se $\xi < 0$ $\Rightarrow$ deve essere $x = 0$ e trovo due sol: $(0, \pm\sqrt{-\xi})$

- Caso $\boxed{\eta \neq 0}$ $\Rightarrow$ $x \neq 0, y \neq 0$. Dalla seconda riga

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2 \\ \eta = 2xy \end{cases}$$

ho $y = \dfrac{\eta}{2x}$. Lo metto nella prima

$$\xi = x^2 - \frac{\eta^2}{4x^2} \iff 4x^4 - 4\xi x^2 - \eta^2 = 0$$

pongo $t = x^2$ ho l'equazione $\underline{4t^2 - 4\xi t - \eta^2 = 0}$

che mi dà
$$t = \frac{2\xi \pm \sqrt{4\xi^2 + 4\eta^2}}{4} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}$$

NOTO CHE la sol. con il – è negativa NON ACCETTABILE

DUNQUE
$$x^2 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2} \iff x = \pm\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}$$

e
$$y = \frac{\eta}{2x} = \pm\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}} = \pm\frac{\eta}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}{\xi^2 + \eta^2 - \xi^2}\right) 2} =$$

$$\pm\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}{\eta^2}\, 2} = \pm\, \mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}{2}}$$

DUNQUE HO
$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \xi}{2}},\ \mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}{2}}\right)$$

IN OGNI CASO IL SISTEMA È RISOLUBILE

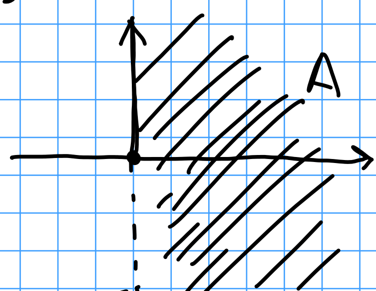
$\Rightarrow \quad F(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

f NON È INIETTIVA perché se fisso $(\xi,\eta)\neq(0,0)$ trovo una coppia di punti (x,y) su cui $F(x,y)=(\xi,\eta)$

OPPOSTI

RESTRINGIAMO F sull'insieme A definito da

$$A=\{(x,y) : x>0\}\cup\{(0,y) : y\geq 0\}$$



- Vediamo se F è iniettiva su A e vediamo qual è l'immagine $F(A)$. COMINCIO DALLA SECONDA DOMANDA: $F(A)=\,??$

Fissato $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}$ devo vedere se esiste $(x,y)\in A$ per cui $F(x,y)=(\xi,\eta)$ (e quante di queste (x,y) ci sono)

Per i calcoli fatti sopra so che

- Se $(\xi,\eta)=0$ ho solo $(0,0)\in A$
- Se $\underline{\eta\neq 0}$ ho quella coppia di punti

$$(x,y)=\pm\left(\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}}}_{>0\ (\text{fa zero se e solo se }\eta=0\text{ e }\xi<0)},\ \mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right)\leftarrow\otimes$$

dunque per avere $(x,y)\in A$ DEVO SCEGLIERE +

Se peraltro scelgo + il punto $(x,y)\in A$.

QUINDI (ξ,η) con $\eta\neq 0$ appartiene a $F(A)$ e c'è un'unico (x,y) per cui $F(x,y)=(\xi,\eta)$

e c'è un unico $(x,y) \in A$ t.c. $F(x,y) = (\xi,\eta)$

• Se $\underline{\eta = 0}$ $\xi \neq 0$; allora le sol. sono

$\pm(\sqrt{\xi}, 0)$ per $\xi > 0$ $\leftarrow$ STA IN A $\Leftrightarrow$ prendo il +

$\pm(0, \sqrt{-\xi})$ se $\xi < 0$ $\leftarrow$ STA IN A $\Leftrightarrow$ prendo il +

IN DEFINITIVA

- F è iniettiva su A
  (se c'è $(x,y) \in A$ con $F(x,y) = (\xi,\eta)$ ce n'è UNA SOLA)
- $F(A) = \mathbb{R}^2$ e la funzione inversa

$$F^{-1}(\xi,\eta) = \begin{cases} (0,0) & \text{se } (\xi,\eta) = (0,0) \\ (\sqrt{\xi}, 0) & \text{se } \xi > 0 \quad \eta = 0 \\ (0, \sqrt{-\xi}) & \text{se } \xi < 0 \quad \eta = 0 \\ \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\ \operatorname{sgn}(\eta)\sqrt{\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right) & \text{se } \eta \neq 0 \end{cases}$$

NOTIAMO CHE A NON È NÉ LIMITATO NÉ CHIUSO

DICO CHE F^{-1} NON È CONTINUA NEI PUNTI (ξ,η) con $\xi < 0$ $\eta = 0$. Per esempio F^{-1} NON è continua in $(-1,0)$.

Per vedere che F^{-1} NON È CONTINUA CONSIDERO LE DUE SUCCESSIONI $P_n = (-1, 1/n)$ $Q_n = (-1, -1/n)$

È chiaro che $P_n \to (-1,0)$ $Q_n \to (-1,0)$

$$F^{-1}(P_n) = F^{-1}(-1, 1/n) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{1+1/n^2}+1}{2}}\right.$$

$$F^{-1}(P_n) = \left(\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{1+1/n^2}+1}{2}} \right) \to (0, 1)$$

$$F^{-1}(Q_n) = F^{-1}(-1, -1/n) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{1+1/n^2}+1}{2}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}, -\sqrt{\frac{\sqrt{1+1/n^2}+1}{2}} \right) \to (0,-1)$$

$$\lim_{n\to\infty} F^{-1}(P_n) = (0,1) \quad \neq \quad F^{-1} \text{ NON È CONTINUA}$$

$$\lim_{n\to\infty} F^{-1}(Q_n) = (0,-1) \quad \text{IN } (-1,0)$$

$$(P_n \to (-1,0) \quad Q_n \to (-1,0))$$

A non è compatto $F: A \to \mathbb{R}^2$ è iniettiva e surgettiva

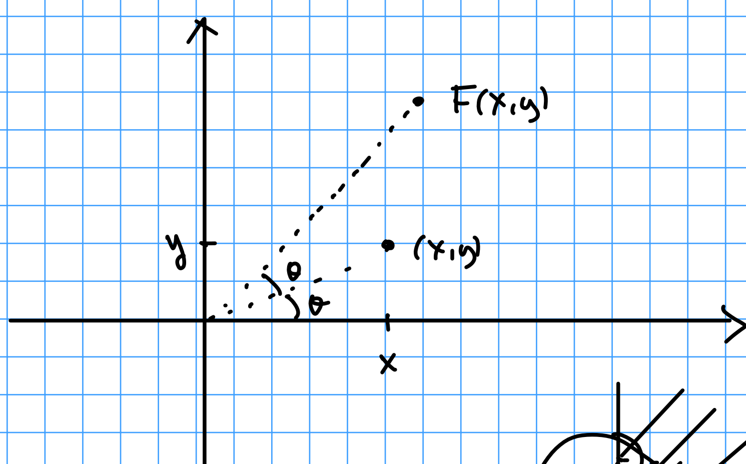
$F^{-1}: \mathbb{R}^2 \to A$ NON È CONTINUA

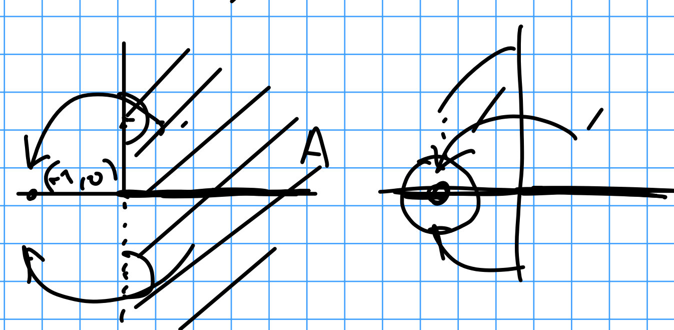
CONTROESEMPIO se A non è compatto.

OSS. IN REALTÀ se VEDO $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{C}$ la mappa

F corrisponde a $F(z) = z^2$

INFATTI se $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2} + \underbrace{2xy}\, i$

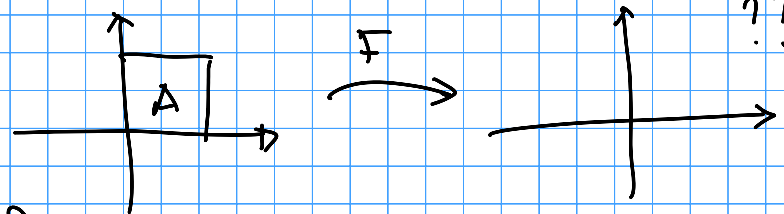




ESERCIZIO Prendo $A = \square = \{(x,y)\ \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

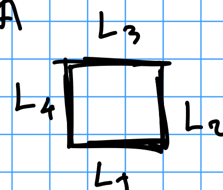
A è compatto dunque F^{-1} su $F(A)$ è continua

Cerchiamo $F(A) =: B$



Conviene vedere dove va a finire ∂A

$\partial A = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$



$L_1 = \{(x,0)\ \ 0\le x\le 1\}$

$L_2 = \{(1,y)\ \ 0\le y\le 1\}$

$L_3 = \{\{x,1\}\ \ 0\le x\le 1\}$

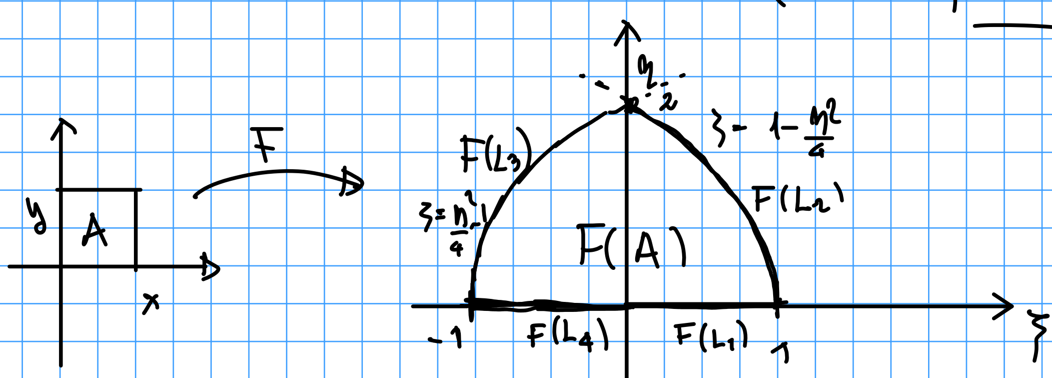
$L_4 = \{\{0,y\}\ \ 0\le y\le 1\}$

(a) $F(L_1) = \{F(x,0) : \ 0\le x\le 1\} = \{(x^2,0)\ \ 0\le x\le 1\}$
$= L_1$

(b) $F(L_2) = \{F(1,y) : \ 0\le y\le 1\} = \{(1-y^2, 2y)\ \ 0\le y\le 1\}$

cioè (ξ,η) con $\xi = 1-y^2$, $\eta = 2y$ con $0\le y\le 1$

$\Rightarrow \ y = \frac{\eta}{2} \ \Rightarrow \ \xi = 1-\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 = \boxed{\xi = 1-\frac{\eta^2}{4} \qquad 0\le\eta\le 2}$



$F(L_3) = \{F(x,1) : \ 0\le x\le 1\} = \{(\xi,\eta) : \ \xi = x^2-1,\ \eta = 2x \ \ 0\le x\le 1$

se ricavo x trovo $x = \frac{\eta}{2} \ \Rightarrow \ \xi = \frac{\eta^2}{4} - 1 \qquad 0\le\eta\le 2$