Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 11 21/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

"Segnatura" di una matrice / (applicazione lineare)

- Data una matrice A $N\times N$ chiamo "forma quadratica" la funzione $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) := (Ax)\cdot x$
$(= x^t A x = (Ax)^t x)$ $\qquad (x\cdot y = x^t y = y^t x)$

- $A \geq 0$ / $A > 0$ se $\varphi(x) \geq 0 \ \forall x$ / $\varphi(x) > 0 \ \forall x \neq 0$

<u>CRITERIO DI SYLVESTER</u> (per vedere se $A > 0$ o $A <$)

Premettiamo delle definizioni. Data una A $N\times N$ chiamo "minore principale di A" una sottomatrice A' ottenuta da A M $(<N)$ righe e M colonne <u>AVENTI GLI STESSI</u> INDICI: più precisamente per costruire A' devo dare M indici $i_1 \ldots i_M$ compresi tra 1 ed N e rimuovere da A le righe $i_1 \ldots i_M$ e le colonne $i_1 \ldots i_M$

Per esempio se

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rimuovo 2 e 3 rigo/colonna

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ ← possibile minore principale

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ è un minore di A ma non è un minore principale.

Dico che A' è un "minore principale dominante" se A' è ottenuto da A rimuovendo le ultime M $(<N)$ righe e le ultime M colonne (anche $M=0$ va bene)

Nel caso di A e A' scritte prima A' NON È UN minore dominante. Il minore dominante di A con $M=2$ è

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora se A è simmetrica allora

$A > 0 \iff \det A' > 0$ per ogni A' minore principale dominante

(ci sono N minori di questo tipo)

$A \geq 0 \iff \det A' \geq 0$ per ogni A' minore principale

(sono di più di N!!)

Se A è 4×4 ci sono

1 minore dominante con $M=0$

4 " " con $M=1$

15 ← $\binom{4}{2} = 6$ " " con $M=2$

4 " " con $M=3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{vediamo se } A > 0 \ \ldots$$

$M = 3$ $\quad A' = [-1] \leftarrow$ a_{11} è > 0 NO $\quad$ NON è > 0

(e nemmeno ≥ 0)

NATURALMENTE C'È IL CRITERIO per $A < 0$ / $A \leq 0$

(che non corrisponde a mettere <0 dove c'era >0 !!!!)

In effetti: $\quad A < 0 \iff -A > 0$ (evidente dalla def.)

$\iff \quad A < 0 \iff (-1)^K \det A' > 0$ per ogni minore principale dominante di dimensione K

(cioè $\quad a_{11} < 0$ perché $K = 1$ dispari

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$ perché $K = 2$ pari

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0$ perché $K = 3$ dispari

$\vdots$

$A \leq 0 \iff$ per ogni minore principale di dimensione K

<u>OSS</u> È chiaro che per avere $A \geq 0$ non basta $\det A' \geq 0$ per ogni minore principale. Per esempio

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ non è ≥ 0 $\quad$ anche se $a_{11} \geq 0$ e $\det A \geq 0$

INVECE è ≤ 0 $\quad$ (ho $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -1$ entrambi ≤ 0)

perché se guardo TUTTI i minori principali ho

$[0] \quad [-1] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ che hanno tutti $\det \leq 0$

Nel caso di una 2×2, simmetrica, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$A > 0 \iff a>0 \quad ac-b^2>0$

$A<0 \iff a<0 \quad ac-b^2>0$

$A\geq 0 \iff a\geq 0 \quad c\geq 0 \quad ac-b^2\geq 0$

$A\leq 0 \iff a\leq 0 \quad c\leq 0 \quad ac-b^2\geq 0$

ATTENZIONE: SYLVESTER NON È LA DEFINIZIONE DI $A\geq 0/\dots$, È UN CRITERIO PER VEDERE SE $A\geq 0/\dots$

TORNIAMO ALLE PROPRIETÀ "GLOBALI" delle funzioni continue

- Weierstrass .. (VISTO)
- Th. degli zeri NON HA UN VERO CORRISPONDENTE N-DIM.

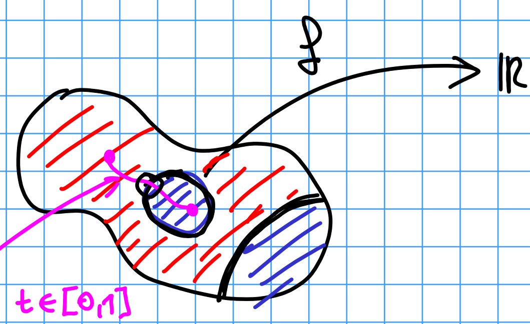
LA COSA PIÙ SIMILE È L'ENUNCIATO:

<u>Prop.</u> $A\subset\mathbb{R}^n$ $f: A\to\mathbb{R}$ continua. Indichiamo

$A^+=\{x\in A: f(x)>0\}$

$A^-=\{x\in A: f(x)<0\}$

$A^0=\{x\in A: f(x)=0\}$



Allora se $\gamma:[0,1]\to A$ è continua e se

$\gamma(0)\in A^-$, $\gamma(1)\in A^+$

Allora $\exists\, t\in\,]0,1[$ tale che $\gamma(t)\in A^0$

QUESTO SEGUE DAL TEOREMA degli zeri applicato a

$g(t)=f(\gamma(t))$

- CONTINUITÀ DI f^{-1} ??