Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10 16/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema di Weierstrass

$A \subset \mathbb{R}^N$ limitato e chiuso (A compatto)

$f : A \to \mathbb{R}$ continua.

Allora f ammette massimo e minimo CIOÈ

$\exists x'$ (pto di minimo) $\exists x''$ (pto di max) tali che

$$\min_A f \to f(x') \le f(x) \le f(x'') \leftarrow \max_A f$$

Si vede facilmente che non si possono eliminare le ipotesi (senza perdere la tesi)

- $f(x) = x$ è continua ma non ha né max né min su $A = \mathbb{R}$ (A illimitato)
- $f(x) = x$ è continua ma non ha né max né min su $]0,1[= A$ (A non è chiuso)

IN REALTÀ SI PUÒ GENERALIZZARE Weierstrass in casi in cui A non è COMPATTO

Vediamone una versione

WEIERSTRASS GENERALIZZATO (per il minimo) $\forall A \subset \mathbb{R}^N$ $f: A \to \mathbb{R}$
f continua. (non chiedo né che A sia limitato né che sia chiuso)
Però devo aggiungere delle ipotesi) SUPPONGO
(a) Se $x_0 \in \partial A$, $x_0 \notin A$ ($\Rightarrow x_0$ è di accumulazione) deve valere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

(se A è chiuso non ci sono tali punti $\Rightarrow$ (a) è automaticamente vero)
(b) Se A è illimitato ($\Leftrightarrow \infty$ è di acc. per A) deve valere

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$$

(se A è limitato la (b) è automaticamente vero)

Allora f ammette minimo.

Dim. Prendiamo $m := \inf_A f = \inf f(A)$ ($m \in [-\infty, +\infty[$).
Per un'osservazione fatta ieri esiste una successione (y_n) in $f(A)$ con $y_n \to m$ (il sup / l'inf di un insieme è limite di una successione di punti dell'insieme - SEGUE dalle proprietà del sup / dell'inf)
In altri termini trovo (x_n) in A tale che $y_n = f(x_n) \to m$.
CI SONO TRE POSSIBILITÀ
(1) (x_n) è illimitata $\longleftrightarrow$ $\exists\, n_k$ t.c. $\|x_{n_k}\| \to +\infty$
PER LA IPOTESI (b) ho che $f(x_{n_k}) \to +\infty$ MA QUESTO CONTRASTA CON il fatto che $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to m < +\infty$

DUNQUE (X_n) è limitata (il caso (1) non si può presentare.

Se (X_n) è limitata $\Rightarrow$ esiste un'estratta convergente $X_{n_k} \to X_0 \in \mathbb{R}^N$. È chiaro che $X_0 \in \overline{A}$

(2) $X_0 \notin A$ cioè $X_0 \in \partial A$. MA ALLORA ho l'ipotesi (a) che mi dice che $f(X_{n_k}) \to +\infty$

Di nuovo questo è impossibile perché $f(X_{n_k}) = y_{n_k} \to m < +\infty$

DUNQUE RIMANE IL CASO

(3) $X_{n_k} \to X_0 \in A \Rightarrow f(X_{n_k}) \to f(X_0)$, per la continuità di f; però $f(X_{n_k}) = y_{n_k} \to m \Rightarrow$

$$\boxed{f(x_0) = m}$$

Ne segue che $m > -\infty$ ed è il minimo di f su A (X_0 è un pto di minimo)

CASO PARTICOLARE $A = \mathbb{R}^N$. Allora $\partial A = \phi$ e l'ipotesi da fare è $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \exists \min_A f$.

ESEMPIO Consideriamo una matrice A $N \times N$ e consideriamo la "forma quadratica" associata ad A:

$$\varphi(x) := (Ax) \cdot x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(N.B. $\varphi(tx) = t^2 \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

Per esempio se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(x,y) = 2x^2 + xy + 3yx + 7y^2$
$= 2x^2 + 4xy + 7y^2$

OSS. Se al posto di A considero $\frac{A+A^t}{2} = A^*$ la forma quadratica non cambia:

$$\varphi_1(x) = (A^* x)\cdot x = \frac{1}{2}\left((A+A^t)x\right)\cdot x = \frac{1}{2}(Ax)\cdot x + \frac{1}{2}(A^t x)\cdot x =$$

$$= \left(\underline{\text{proprietà della trasposta:}} \quad A^t x \cdot y = x \cdot Ay = Ay \cdot x\right)$$

$$\frac{1}{2}(Ax)\cdot x + \frac{1}{2}(Ax)\cdot x = (Ax)\cdot x = \varphi(x)$$

DUNQUE UNA FORMA QUADRATICA PROVIENE SEMPRE DA UNA MATRICE SIMMETRICA.

DUNQUE POSSO SEMPRE TROVARE UNA BASE per $\mathbb{R}^N$ fatta di autovettori TRA LORO ORTOGONALI:

$\exists\, e_1 \dots e_N \in \mathbb{R}^N$ $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$ (non necessariamente distinti)

tali che $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$ (ORTONORMALI)

$$\boxed{Ae_i = \lambda_i e_i}$$

e dunque gli e_i sono una base per $\mathbb{R}^N$. Se mi metto nella base di $e_1 \dots e_N$ la matrice A diventa diagonale (l'applicazione lineare $Lx = Ax$ si rappresenta con una matrice diagonale). Tale matrice diagonale e'

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Questo corrisponde a dire che esiste una matrice (cambio di variabile) M tale che

$$A = M D M^{-1} = M D M^t \qquad (M^{-1} = M^t)$$

IN QUESTA BASE la forma quadratica φ si scrive

$$\varphi(x_1' \dots x_N') = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_N (x_N')^2$$

$x'_1 \dots x'_N$ sono le coordinate di x nella base $e_1 \dots e_N$:

$$\varphi(x) = \varphi(x'_1 e_1 + \dots + x'_N e_N) =$$

$$\left(D(x'_1 e_1 + \dots + x'_N e_N)\right) \cdot (x'_1 e_1 + \dots x'_N e_N) =$$

$$(\lambda_1 x'_1 e_1 + \dots + \lambda_N x'_N e_N) \cdot (x'_1 e_1 + \dots + x'_N e_N) =$$

$$\lambda_1 (x'_1)^2 \underbrace{e_1 \cdot e_1}_{=1} + \dots + \lambda_N (x'_N)^2 \underbrace{e_N \cdot e_N}_{=1}$$

$$\varphi(x) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \dots + \lambda_N (x'_N)^2$$

DEF. (segnatura di una matrice) Dico che la matrice

- A $N \times N$ è ≥ 0 se $(\varphi(x) =) (Ax) \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$
- Dico che A è > 0 se $(\varphi(x) =) (Ax) \cdot x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$
- A è ≤ 0 se $(Ax) \cdot x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$
- A è < 0 se $(Ax) \cdot x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad x \neq 0$

Non chiedo che A sia simmetrica. Però $A \geq 0$ $(\leq 0 / > 0 / < 0)$ $\iff A^* \geq 0$ $(\leq 0 / > 0 / < 0)$ dove $A^* = \frac{1}{2}(A + A^t)$

FATTO $\quad A \geq 0 \; (\leq 0) \iff$ tutti gli autovalori di A^* sono ≥ 0 $(\leq)$

$\quad A > 0 \; (< 0) \iff$ tutti gli autovalori di A^* sono > 0 $(<)$

IN EFFETTI se $A^* \geq 0$ ho che

$$\underset{\lambda_i \|e_i\|^2 = \lambda_i}{(A^* e_i) \cdot e_i} \geq 0 \qquad i = 1 \dots \qquad \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \;\; \forall i = 1 \dots N$$

(stesso discorso se $A^* > 0$)

VICEVERSA, se tutti i λ_i sono ≥ 0 (>0) ho

$$(Ax)\cdot x = (A^* x)\cdot x = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_N (x_N')^2$$

(x_i' sono le coordinate di x rispetto a $e_1 \dots e_N$)

$$\geq \lambda_{min} \left((x_1')^2 + \dots + (x_N')^2 \right) \quad \text{dove } \lambda_{min} = \min(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_N)$$

$$= \lambda_{min} \|x\|^2$$

(perché $x = x_N' e_1 + \dots x_N' e_N \Rightarrow \|x\|^2 = x \cdot x =$

$(x_N' e_1 + \dots x_N' e_N)\cdot(x_N' e_1 + \dots x_N' e_N) = (x_1')^2 + \dots + (x_N')^2$)

DUNQUE $(Ax)\cdot x \geq \lambda_{min} \|x\|^2 \quad \forall x$

Se $\lambda_{min} \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$ / Se $\lambda_{min} > 0 \Rightarrow A > 0$)

$\boxed{\text{OSS.}}$ (P) $\|$ $A > 0 \Leftrightarrow$ esiste $\nu > 0$ per cui $(Ax)\cdot x \geq \nu \|x\|^2$

In effetti questa proprietà è stata dimostrata sopra dato che $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_{min} > 0$

e si è visto che $(Ax)\cdot x \geq \lambda_{min} \|x\|^2$

RAGIONAMENTO ALTERNATIVO (se non conoscessi il teorema spettrale)

per dimostrare (P). OVVIAMENTE SE esiste $\nu > 0$ come sopra, allora $A > 0$. Dobbiamo dimostrare il viceversa.

PONIAMO $\varphi(x) := (Ax)\cdot x$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$

È chiaro che
- φ è continua
- S è limitato, S è chiuso

Per Weierstrass esiste $\min_S \varphi =: \nu$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, e \in S \,, \quad \varphi(e) = \nu \le \varphi(x) \quad \forall x \in S$

Dato che $e \neq 0$ $(e \in S)$ $\quad \varphi(e) > 0 \quad$ cioè $\nu > 0$.

Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $x \neq 0$ chiamo $\hat{x} := \frac{1}{\|x\|} x$. Si ha $\hat{x} \in S$ $\left(\Rightarrow \quad \varphi(\hat{x}) \ge \nu \right)$. Allora

$$\varphi(x) = \varphi\left(\|x\| \hat{x} \right) = \|x\|^2 \varphi(\hat{x}) \ge \|x\|^2 \nu$$

che è ciò che volevo!

{IN EFFETTI IL TEOREMA SPETTRALE SI DIMOSTRA COSÌ: ν = primo autovalore — poi si passa all'ortogonale e si si continua}

RIASSUMENDO POSSO DIRE CHE SONO EQUIVALENTI

(a) $A > 0$ $\qquad\qquad$ $(A < 0)$

(b) $\lambda_{min} > 0$ $\quad$ (λ_i autovalori di A*) $\qquad$ $(\lambda_{max} < 0)$

(c) $\exists\, \nu > 0 : \; (Ax)\cdot x \ge \nu \|x\|^2 \quad \forall x$ $\qquad$ $(\quad \le -\nu \|x\|^2)$

(d) $\displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} (Ax)\cdot x = +\infty$ $\qquad$ $(\quad = -\infty)$

(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) li abbiamo visti.

(c) $\Rightarrow$ (d) $\quad$ Dal fatto che $(Ax)\cdot x \ge \underbrace{\nu \|x\|^2}_{\text{questo} \to +\infty \text{ se } \|x\| \to \infty}$ è chiaro

che $\displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} (Ax)\cdot x = +\infty$

(d) $\Rightarrow$ (b) $\quad$ Prendiamo un qualunque autovalore e_i $(i = 1 \dots N)$ consideriamo "la curva" $\gamma(t) = t\, e_i \quad t \in \mathbb{R}$

Se $(Ax)\cdot x \xrightarrow{\|x\| \to \infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad (A\gamma(t))\cdot\gamma(t) \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$

(perché $\|\gamma(t)\| = t\,\|e\| \to +\infty$ se $t \to +\infty$)

(se no ben per x, $\Rightarrow$ no ben per $x = \gamma(t)$)

dunque $(A\, t e_i) \cdot (t e_i) \to +\infty$

$$\begin{gathered} (A\, t e_i) \cdot (t e_i) \\ \parallel \\ t^2 (A e_i) \cdot e_i = \lambda_i t^2 \end{gathered}$$ $\Leftarrow$ DEVE ANDARE A $+\infty$

$\Rightarrow \lambda_i > 0$

Dunque $\lambda_i > 0 \;\; \forall i \Rightarrow \lambda_{min} > 0$

<u>ESEMPIO</u>

$$f(x,y) = \underbrace{2x^2 + 4xy + 5y^2}_{\text{quadratica}} \underbrace{- 10x + 3y}_{\text{lineare}}$$

DIMOSTRARE CHE $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$

($\Rightarrow$ f ha minimo su $\mathbb{R}^2$!!)

<u>NOTO</u> che f = forma quadratica + forma lineare ; in effetti

$$\boxed{f(x,y) = (A\vec{p}) \cdot \vec{p} + \vec{b} \cdot \vec{p}}$$ dove $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a_{11} = coeff di x^2
a_{22} = coeff. di y^2
$a_{21} = a_{12} = \frac{1}{2}$ coeff di xy)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per far vedere che $f(x,y) \to +\infty$ mi serve una "minorazione" con qualcosa (di più semplice) che va a $+\infty$

Vediamo la parte quadratica $A\vec{p} \cdot \vec{p}$ Mi piacerebbe che $A > 0$. Mi serve il minimo autovalore.

Abbiamo che i λ_i sono le radici di $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 =$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 .$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases} \leftarrow \underline{\underline{\text{OK}}} \quad \underline{\lambda_{min} = 1}$$

Quindi $\quad (A\vec{p})\vec{p} \geq \underset{\lambda_{min}=1}{\|\vec{p}\|^2} \quad \forall \vec{p}$

$$f(\vec{p}) \geq \|\vec{p}\|^2 + \vec{b}\cdot\vec{p} \geq$$

$$\underbrace{\|\vec{p}\|^2 - \|\vec{b}\|\,\|\vec{p}\|}_{\text{questa espressione va a } +\infty \text{ se } \|p\| \to +\infty}$$

(uso Schwartz:
$|\vec{b}\cdot\vec{p}| \leq \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{p}\|$
$-\|\vec{b}\|\,\|\vec{p}\| \leq \vec{b}\cdot\vec{p} \leq \|\vec{b}\|\,\|\vec{p}\|$)

$$= \|\vec{p}\|^2 \Big(1 - \underbrace{\|\vec{b}\| / \|p\|}_{\downarrow\, 0} \Big) \longrightarrow +\infty .$$

DUNQUE, per confronto, $\quad f(\vec{p}) \xrightarrow{\|\vec{p}\| \to +\infty} +\infty$