Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 09 15/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Avevamo: $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ e i "sotto livelli"

$$G^c := \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) \leq c \}$$

$\boxed{\text{G CONTINUA IN TUTTO QUANTO SEGUE}}$

Questo insieme è $\underline{\text{chiuso}}$. Infatti

$G^c = G^{-1}(]-\infty, c])$ (la controimmagine

dell'intervallo $]-\infty, c] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq c \}$ ← è CHIUSO in $\mathbb{R}$

Analogamente $\{ x : G(x) < c \} = G^{-1}(]-\infty, c[)$ è aperto dato che l'intervallo $]-\infty, c[= \{x \in \mathbb{R} : x < c\}$ è aperto in $\mathbb{R}$

e anche l'insieme di livello

$$\{ x \in \mathbb{R} : G(x) = c \} = G^{-1}(\{c\}) \qquad (\{c\} \text{ è chiuso in } \mathbb{R})$$

SI HA:

(a) $\overline{\{ G(x) \leq c \}}^{\circ} \supset \{ G(x) < c \}$

(b) $\overline{\{ G(x) < c \}} \subset \{ G(x) \leq c \}$

(in generale non vale "=")

$\underline{\text{Dim}}$ Per (a) devo far vedere che i punti di $\{G(x) < c\}$

sono interni a $\{G(x) \leq c\}$. Ma so che $\{G(x) < c\}$ è aperto $\Rightarrow$ se $x \in \{G(x) < c\}$ $\Rightarrow$ x è interno a $\{G(x) < c\}$ $\Rightarrow$ x è interno a $\{G(x) \leq c\}$ (perché $\{G(x) < c\} \subset \{G(x) \leq c\}$)

Per la (b) ragiono mediante successioni.

Se $x \in \overline{\{G(x) < c\}}$ so che esiste una successione (x_n) in $\{G(x) < c\}$ tale che $x_n \to x$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ (x_n)$ tale che $G(x_n) < c$ e $x_n \to x$. Ma $G(x_n) \to G(x)$, per continuità e allora (teoremi sui limiti)

$G(x) \leq c \quad \Rightarrow \quad x \in \{G(x) \leq c\}$

INOLTRE

(c) $\partial\{G(x) \leq c\} \subset \{G(x) = c\}$

(d) $\partial\{G(x) < c\} \subset \{G(x) = c\}$

ANCHE QUI NON È DETTO CHE VALGA "="

(c) Si ragiona per successioni: se $x \in \partial\{G(x) \leq c\}$ vuol dire che esistono (x'_n) e (x''_n) due successioni tali che

$x'_n \in \{G \leq c\}$ $\quad x''_n \notin \{G \leq c\}$ e entrambe tendono a x

$\Leftrightarrow \quad G(x'_n) \leq c \quad x'_n \to x \quad / \quad G(x''_n) > c \quad x''_n \to x$

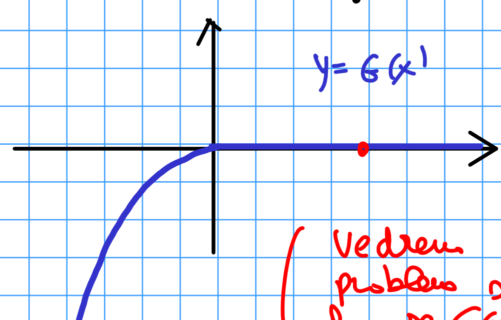
Per continuità di G ho

$G(x'_n) \to G(x) \leq c \quad / \quad G(x''_n) \to G(x) \geq c$

NE SEGUE CHE $\boxed{G(x) = c}$

CONTROESEMPI Considero $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



(Vedremo che il problema sta nel fatto che se $G(x)=0 \Rightarrow G'(x)$

$\{G < 0\} =]-\infty, 0[\quad = \{x < 0\}$

$\{G \leq 0\} = \mathbb{R}$

Allora è chiaro che $\overline{\{G < 0\}} =]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ (MA NON $=$)

Analogamente $\overbrace{\{G \leq 0\}}^{\circ} = \mathbb{R} \supset]-\infty, 0[$ (MA NON $=$)

INOLTRE

$$\partial\{G < 0\} = \partial]-\infty, 0] = \{0\} \overset{\subset}{\neq} \{G = 0\} = [0, +\infty[$$

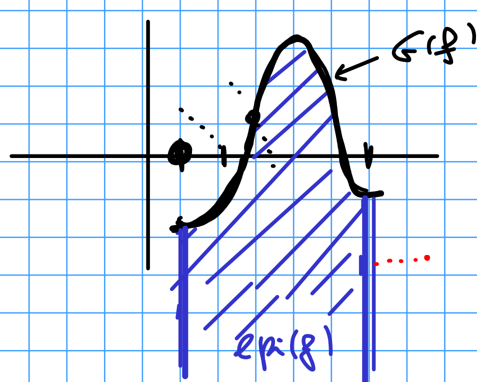
$$\partial\{G \leq 0\} = \partial \mathbb{R} = \emptyset \underset{\subset}{\neq} \{G = 0\} = [0, +\infty[$$

GRAFICI E SOTTOGRAFICI

$f : A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

Posso definire l'epigrafico di f: $\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$

N.B $\mathrm{epi}(f) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$



Posso anche introdurre il Grafico $G(f) := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

FATTO Supponiamo che A sia chiuso

$$\partial\, \mathrm{epi}(f) = G(f) \cup \{(x, y) : x \in \partial A \quad y \leq f(x)\}$$

Dim. Devo far vedere le due inclusioni $\subset$ e $\supset$

Vediamo "$\subset$". Parto da una coppia $(x, y) \in A \times \mathbb{R}$ con $(x, y) \in \partial\, \mathrm{epi}(f)$ DUNQUE ESISTONO DUE SUCC.

(x'_n, y'_n) e (x''_n, y''_n), entrambe tendono a (x, y) e

$f(x'_n) \geq y'_n$ / $f(x''_n) < y''_n$. Si ha

$x'_n \to x \quad y'_n \to y$ / $x''_n \to x \quad y''_n \to y$

Per la continuità di f $\quad f(x'_n) \to f(x) \quad f(x''_n) \to f(x)$

. NON SO CHE $x'_n \in A$ / $x''_n \in A$

DISTINGUIAMO DUE CASI

(1) $x \in \mathring{A}$ $\Rightarrow$ necessariamente $x'_n \to x \Rightarrow x'_n \in A$ (per n grande). Dunque

$$\begin{array}{ccc} f(x'_n) & \to & f(x) \\ \vee\!| & & \\ y'_n & \longrightarrow & y \end{array} \Rightarrow \boxed{f(x) \geq y}$$

continuità $\quad$ continuità

Per lo stesso motivo $x''_n \in A$ (n grande) $\Rightarrow f(x''_n) \to f(x)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq y}$ $\quad$ ($y''_n \to y \quad y''_n \geq f(x''_n)$)

DUNQUE se $(x,y) \in \partial\, \mathrm{epi}(f)$ $\quad x \in \mathring{A} \Rightarrow \quad y = f(x)$

$\Rightarrow (x,y) \in G(f)$

(2) $x \in \partial A$ ($\subset A$ perché A è chiuso $\Rightarrow$ ha senso $f(x)$)

Abbiamo $\quad (x'_n, y'_n) \in \mathrm{epi}(f) \qquad x'_n \to x,\ x'_n \to y$

$\qquad (x''_n, y''_n) \notin \mathrm{epi}(f) \qquad x''_n \to x,\ x''_n \to y$

Dalla prima riga ho $x'_n \in A$ (perché $(x'_n, y'_n) \in \mathrm{epi}(f)$)

ripeto il ragionamento di (1) e ho $\quad \begin{array}{ccc} f(x'_n) & \to & f(x) \geq y \\ \vee\!| & & \\ y'_n & \to & y \end{array}$

Dalla seconda riga non ricavo nulla.

DUNQUE, se $(x,y) \in \partial\, \mathrm{epi}(f)$ $\quad x \in \partial A \Rightarrow y \leq f(x)$

HO DIMOSTRATO "$\subset$"

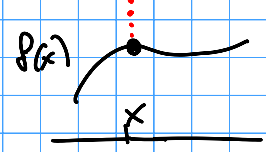
Vediamo il viceversa "$\supset$". Devo dimostrare che

(c) $G(f) \subset \partial\, \mathrm{epi}(f)$

(d) $\{(x,y) \ x \in \partial A,\ y \leq f(x)\} \subset \partial\, \mathrm{epi}(f)$

Per la (c) $\forall$ prendo $(x,y) \in G(f)$, definisco $\quad x'_n := x \quad y'_n = f(x) = y$

$\qquad x''_n := x \quad y''_n = f(x) + 1/n = y + 1/n$



è chiaro che $(x'_n, y'_n) = (x, f(x)) \in G(f)$ (e tende a (x,y))

Mentre la seconda succ. $(x, y+1/n) \notin \mathrm{epi}(f)$, ma
$(x, y+1/n) \to (x,y)$

$\Rightarrow (x,y) \in \partial\, \mathrm{epi}(f)$ $\quad \left(G(f) \subset \partial\, \mathrm{epi}(f) \right)$

Per la (d) Prendo $(x,y) \in \{(x,y) : x \in \partial A,\ y \le f(x)\}$

Prendo $x'_n \in A \quad x'_n \to x$ (uso che $x \in \partial A$)
$x''_n \notin A \quad x''_n \to x$
$y'_n = y'' = y$

è chiaro che $(x'_n, y'_n) \in \mathrm{epi}(f)$
$(x''_n, y''_n) \notin \mathrm{epi}(f)$
Ma $(x'_n, y'_n) \to (x,y)$
$(x''_n, y''_n) \to (x,y)$

e dunque ho che $(x,y) \in \partial\, \mathrm{epi}(f)$

$$\Rightarrow \{(x,y)\ \ x \in \partial A,\ y \le f(x)\} \subset \partial\, \mathrm{epi}(f)$$

HO CONCLUSO LA DIMOSTRAZIONE

<u>OSS.</u> Se $A = \mathbb{R}^N$ è chiaro che $\partial A = \emptyset$ e allora
$\partial\, \mathrm{epi}(f) = G(f)$

Si può anche dim. che, A chius,
$$\overline{\{(x,y)\ \ x \in A\ \ y < f(x)\}} = \mathrm{epi}(f)$$

Posso notare che anche i grafici / epigrafici sono degli insiemi di livello / sottolivello.
Infatti se definisco $G(x,y) = y - f(x)$
(da $A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) (sottintendo che $f : A \to \mathbb{R}$)

Ho che $\{(x,y) : G(x,y) \le 0\} = \{(x,y) \;\; y \le f(x)\} = \operatorname{epi}(f)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad = G(f)$

IN QUESTO CASO VALGONO GLI "=" che prima non erano necessariamente veri $\partial\{G \le 0\} = \{G = 0\}$ NEL CASO $A = \mathbb{R}^N$

OSSERVAZIONI CHE TORNERANNO UTILI PIÙ AVANTI

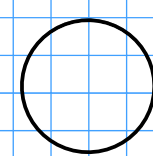
<u>ESEMPIO</u> $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$B := \{G \le 0\} = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ ← DISCO CHIUSO di centro $(0,0)$ e raggio 1

So che $\partial B = S =: \{x^2 + y^2 = 1\}$

Per quanto detto all'inizio so solo che $\partial B \subset \{x^2 + y^2 = 1\}$

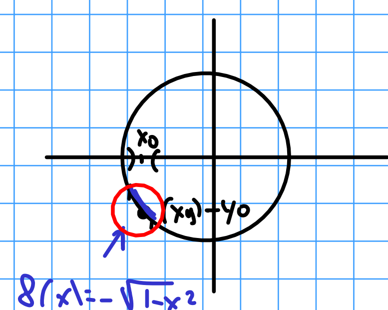
Ma in questo esempio è vero il viceversa (dunque $=$)



Potrei arrivarci notando che, se $(x_0,y_0) \in S$ vale una delle due proprietà:

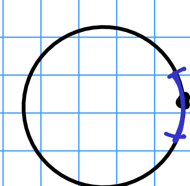
(1) esiste $\delta > 0$ $\exists\, f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ t.c.

VICINO A (x_0,y_0) S è il grafico di $y = f(x)$



(2) esiste $\delta > 0$ $\exists\, f :]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ t.c.

VICINO A (x_0,y_0) S è il grafico di $x = f(y)$



TORNEREMO SU QUESTO ESEMPIO

PROPRIETÀ "GLOBALI" delle funzioni continue:

proprietà in cui si parte da una f continua su tutto il suo dominio A.

<u>Def.</u> Se $A \subset \mathbb{R}^N$ dirò che A è <u>COMPATTO</u> quando

A è limitato e chiuso

(limitato: esiste una costante R tale che $\|x\| \leq R \quad \forall x \in A \Leftrightarrow$
$\exists R > 0 : \quad A \subset B(0, R)$)

<u>PROPRIETA'</u> Se A è compatto, allora vale (*) ogni successione (x_n) di punti di A ($x_n \in A \ \forall n$) esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) ed esiste $x \in A$ per cui $x_{n_k} \to x$

<u>Dim.</u> Se $x_n \subset A \ \forall n \Rightarrow \|x_n\| \leq R$ ((x_n) è limitato)
Ma allora esiste un'estratta x_{n_k} che ha limite x.
Dato che A è chiuso e che $x_{n_k} \subset A \ \forall x \Rightarrow x \in A$.

<u>OSS.</u> VALE ANCHE IL VICEVERSA. : Se vale (*)
$\Rightarrow A$ è compatto (cioè A è chiuso e limitato)

<u>Dim</u> A è chiuso. Se A non fosse chiuso esisterebbe $x \in \partial A$
$x \notin A$. Ma allora $\exists (x_n)$ in A con $x_n \to x$ ($\notin A$)
Se vale (*) deve esistere un'estratta x_{n_k} che tende a un punto $x' \in A$. D'altra parte $x' = x$ ASSURDO

A è limitato. Se non fosse vero $\exists (x_n)$ in A con $\|x_n\| \to +\infty$ (si vede facilmente). USANDO (*) devo trovare $x_{n_k} \to x' \in A$
MA QUESTO È IMPOSSIBILE perché ogni succ. conv. ($\longrightarrow$) deve essere limitata, mentre $\|x_{n_k}\| \to +\infty$ #

DUNQUE A limitato e chiuso $\Leftrightarrow$ vale (*)

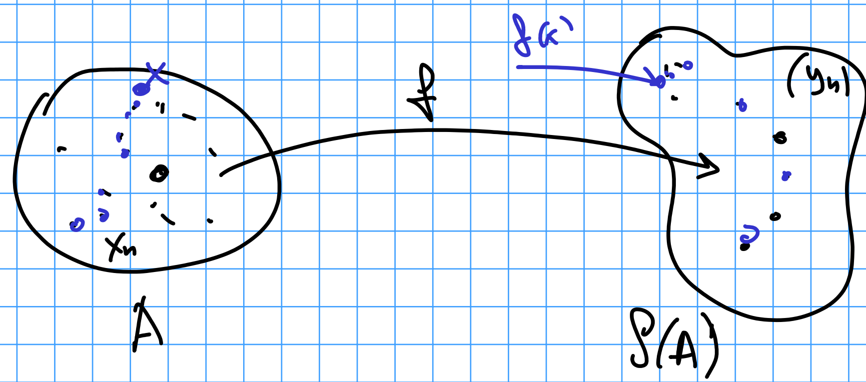
TEOREMA Se A compatto di $\mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}^M$

f continua $\Rightarrow f(A)$ è compatto

Dim Devo dimostrare che $f(A)$ è compatto $\Leftrightarrow$ devo dim. che vale $(\otimes)$ per $f(A)$ CIOÈ:

se (y_n) è una successione in $f(A) \Rightarrow \exists\, (n_k)$, $\exists\, y \in f(A)$ t.c. $y_{n_k} \to y$

IN EFFETTI se $y_n \in f(A)$ vuol dire che $\exists\, (x_n)$ con $x_n \in A$ e $y_n = f(x_n)$



Dato che A è compatto (limitato e chiuso) esiste (n_k) ed esiste $x \in A$ tali che $x_{n_k} \to x$. Dunque

$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$ perché f è continua.

Se chiamo $y = f(x)$ ho che $y_{n_k} \to y$ e $y \in f(A)$

Dunque dato (y_n) in $f(A)$ esiste (n_k) ed esiste $y \in f(A)$ t.c. $y_{n_k} \to y$ #.

f continua manda compatti in compatti

TEOREMA DI WEIERSTRASS Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è compatto e se $f: A \to \mathbb{R}$, f continua, allora f ammette massimo e minimo

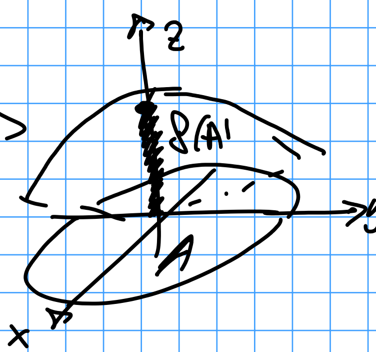
CIOÈ esistono $x', x'' \in A$ (punto di min / punto di max) t.c.

$$\min_A f = f(x') \le f(x) \le f(x'') = \max_A f \quad \forall x \in A$$

DUNQUE x' è un (non unico) punto di minimo per f su A

$f(x')$ è (l'unico) massimo di f su A

x'' . . .



<u>DIM.</u> So che $f(A)$ è compatto in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f(A)$ è limitato e chiuso in $\mathbb{R}$.

Se $M = \sup f(A)$. Deve essere $M < +\infty$ perché $f(A)$ è limitato

Inoltre $M \in f(A)$ perché $f(A)$ è chiuso (sto usando il fatto che se $M = \sup f(A) \Rightarrow$ esiste una succ. di punti di $f(A)$ che tende a M)

Cosa vuol dire che $M = \sup f(A) \in f(A)$ $\leftarrow$ vuol dire che $\exists\, \bar{x} \in A$ per cui $M = f(\bar{x})$, $M \geq f(x)\ \forall x \in A$

Dunque $f(\bar{x})$ è il massimo di f su A.