Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08 14/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CONTINUITÀ $\qquad f : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \subset \mathbb{R}^N$

$x_0 \in A$

Dico che f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ t.c. $\|x - x_0\| < r, x \in A \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Dico che f è continua in A se f è continua in ogni $x_0 \in A$

CONFRONTO CON LA NOZIONE DI LIMITE

CI SONO DUE CASI

- x_0 non è di accumulazione per A (NON HA SENSO IL LIMITE)

  x_0 è ISOLATO $\Leftrightarrow \exists r_0 > 0$ tale che $B(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$

  IN QUESTO CASO OGNI FUNZIONE f è CONTINUA

  NEI PUNTI ISOLATI TUTTE LE FUNZIONI SONO CONTINUE

- x_0 è di accumulazione per A. In questo caso

f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

- Somma di continue è continua
- Prodotto (nei sensi possibili) di continue è continue.
- Reciproco (se è definito) di continua è continua $(M=1)$ se $f(x_0) \neq 0$
- COMPOSIZIONE DI CONTINUE è CONTINUA

CONTINUITÀ TRAMITE SUCCESSIONI

$f: A \to \mathbb{R}^M \quad A \subset \mathbb{R}^N \quad x_0 \in A$. Si ha:

f è continua in $x_0 \iff$ Per ogni successione (x_n) in A tale che $x_n \to x_0$, si ha che $f(x_n) \to f(x_0)$

($\Rightarrow$ "segue dalla proprietà di composizione")

FATTO Se $L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è una applicazione lineare allora L è continua (siamo in "dimensione finita" $N, M \in \mathbb{N}$)

Dim Dimostro che L è continua in $0_N = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$

Naturalmente $L0_N = 0_M$. So che ogni L ha una norma:

$\|L\|$ che è il minimo delle c : $\|Lx\|_{\mathbb{R}^M} \leq c\|x\|_{\mathbb{R}^N}$

(IN particolare $\|Lx\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|L\| \, \|x\|_{\mathbb{R}^N}$)

Da questo segue che, se fisso $\varepsilon > 0$, posso prendere $r = \frac{\varepsilon}{\|L\|}$
(Nel caso $\|L\| = 0$ ha $L = 0$ e la tesi è ovvio)

Se $\underbrace{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}^{=\|x-0\|} < r \iff \underbrace{\|Lx\|_{\mathbb{R}^M}}^{\|Lx-L0\|} \leq \|L\| \, \|x\|_{\mathbb{R}^N} < \|L\| r = \|L\| \frac{\varepsilon}{\|L\|} = \varepsilon$

$\|Lx\|_{\mathbb{R}^M} < \varepsilon$

Ho dimostrato la continuità di L in 0_N

- Se prendo x_0 qualunque basta notare che $\|Lx - Lx_0\| =$

$\|L(x-x_0)\|$; da qui è facile vedere che se $x \to x_0 \Rightarrow$

$x - x_0 \to 0 \Rightarrow$ (per la continuità in 0_N) $L(x-x_0) \to 0$

È facile costruire funzioni continue usando i teoremi sui limiti e le funzioni note che sono state studiate in Analisi 1

<u>Per es</u>

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(xy) - e^z \\ \sin(x+y-z) / (1+x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$$

questa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ed è continua

(uso il fatto che
$(x,y,z) \to x$
$(x,y,z) \to y$ sono continue
$(x,y,z) \to z$

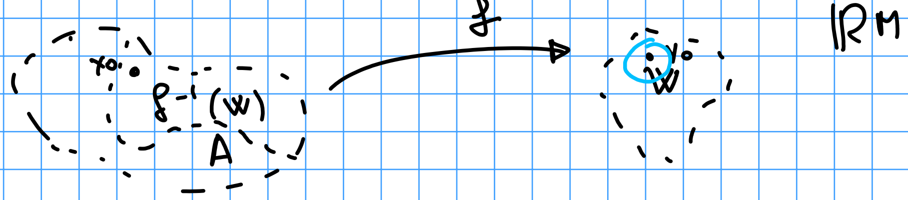
- CONTINUITÀ DELLE PROIEZIONI $\pi_i(x) = x_i$
- $f : A \to \mathbb{R}^M$ è continua $\iff$ tutte le componenti di f, $f_i : A \to \mathbb{R}$ sono continue

---

<u>PROPRIETÀ</u> Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ A <u>aperto</u> di $\mathbb{R}^N$.

Allora se $W \subset \mathbb{R}^M$ è aperto la "controimmagine"

$f^{-1}(W) := \{ x \in A : f(x) \in W \}$ È UN APERTO di $\mathbb{R}^N$



<u>Dim</u> Voglio dimostrare che $f^{-1}(W)$ è aperto. Per questo

prendo $x_0 \in f^{-1}(W)$ e <u>cerco</u> un $r>0$ tale che

$B(x_0,r) \subset f^{-1}(W)$. Per trovare r uso la continuità:

- So che $y_0 := f(x_0) \in W$ $\quad (x_0 \in f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(x_0) \in W)$
- So che W è aperto: $\exists\, \varepsilon>0$ t.c. $B(y_0,\varepsilon) \subset W$
- Per la continuità di f $\exists\, r>0$ t.c.

$$\forall\, x \in B(x_0,r),\, x \in A \Rightarrow f(x) \in B(y_0,\varepsilon) \subset W$$

Naturalmente posso rimpicciolire r in modo che $B(x_0,r) \subset A$ (perché A è aperto).

HO DIMOSTRATO CHE $B(x_0,r) \subset f^{-1}(B(y_0,\varepsilon)) \subset f^{-1}(W)$

HO DIMOSTRATO CHE $f^{-1}(W)$ è aperto.

<u>PROP.</u> Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è chiuso e $f: A \to \mathbb{R}^M$ è continua, allora per ogni $F \subset \mathbb{R}^M$ F chiuso, la controimmagine (di F tramite f)

$$f^{-1}(F) := \{x \in A : f(x) \in F\} \quad \text{È UN CHIUSO.}$$

<u>Per esempio</u> se A è chiuso $\forall\, f: A \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ i sottolivelli

$$\{x \in A : f(x) \leq c\} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

e gli insiemi di livello

$$\{x \in A : f(x) = c\}$$

<u>sono insiemi chiusi</u>

Esempio $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ e $\{x^2+y^2=1\}$ sono chiusi

Se A è aperto $\{x \in A : f(x) < c\}$ $(c \in \mathbb{R})$

è un aperto

Per es. $\{x^2 + y^2 < 1\}$ è aperto $\left(A = \mathbb{R}^2 \text{ che è sia aperto che chiuso} \right)$

ATTENZIONE Non è detto che

$$\overset{\circ}{\overline{\{x : f(x) \leq c\}}} = \{x : f(x) < c\}$$

e neanche

$$\overline{\{x : f(x) < c\}} = \{x : f(x) \leq c\}$$