Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 07 09/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$\mathcal{M}(M,N) = \{$ matrici $M \times N\}$ (M righe ed N colonne)

Se $A \in \mathcal{M}(M,N)$ definisco la norma di A come

NORMA EUCLIDEA

$$\|A\| := \min\{c \geq 0 : \|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq c\|x\|_{\mathbb{R}^N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\}$$

Vediamo che $\|A\|$ è ben definita e che proprietà ha.

Dico che se $c \geq 0$ allora

$$(*) \quad \underbrace{\|Ax\|_M \leq c\|x\|_N \quad \forall x \in \mathbb{R}^N} \iff \|Ax\|_M \leq c \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ con } \|x\|_N = 1$$

In effetti $\Rightarrow$ è ovvio. Viceversa, se $x \in \mathbb{R}^N$ $x \neq 0$ (se $x = 0$ la disuguaglianza è ovvia) posso definire $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_N} = \frac{1}{\|x\|} x$.

Allora $\|\hat{x}\|_N = 1$ e dunque $\|A\hat{x}\|_M \leq c$. Ma questo significa

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_N}\right)\right\|_M \leq c \iff \|Ax\|_M \leq c\|x\|_N$$

Osserviamo che ci sono delle $c \geq 0$ per cui vale $(*)$

Infatti se prendo $X \subset \mathbb{R}^N$

$$Ax = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} A_1^t \cdot X \\ \vdots \\ A_M^t \cdot X \end{bmatrix}$$

($A_1 .. A_M$ sono le righe di A)

$$(Ax)_j = A_j^t \cdot X \qquad j = 1 .. M$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{j,i}^2$$

$\Rightarrow \quad |(Ax)_j| \leq \|A_j^t\|_N \|X\|_N$ (Schwartz) se $j = 1 .. M$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\big((Ax)_j\big)^2 \leq \|A_j^t\|_N^2 \|x\|_N^2}_{(*)} \leq \left(\sum_{j=1}^{M} \|A_j^t\|_N^2\right) \|X\|_N^2$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i,j} a_{ji}^2\right)}_{\text{lo posso chiamare } \|A\|_2^2} \|X\|_N^2$$

(sottintendendo che $\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i,j} a_{ij}^p}$)

HO TROVATO che

$$\sqrt{\sum_{\substack{i=1..N \\ j=1..M}} a_{ij}^2}$$

$$\|(1,3,-4)\|_\infty = 4$$

$$|(Ax)_j| \leq \|A\|_2 \|x\|_{\mathbb{R}^N} \quad \forall j = 1 .. M$$

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_2 \|X\|_{\mathbb{R}^N}$$

IN EFFETTI HO ALLUNGATO IL GIRO... TORNIAMO QUI (*)

Da

$$\big((Ax)_j\big)^2 \leq \|A_j\|_N^2 \|X\|_N^2$$

SOMMO SU $j = 1 .. M$

$$\sum_{j=1}^{M} \big((Ax)_j\big)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{M} \|A_j\|_N^2\right) \|X\|_N^2 = \left(\sum_{\substack{i=1..N \\ j=1..M}} (a_{ji})^2\right) \|X\|_N^2$$

DUNQUE

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \|A\|_2^2 \|X\|_{\mathbb{R}^N}^2$$

Se faccio la radice

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|A\|_2 \|X\|_{\mathbb{R}^N} \quad \leftarrow (**)$$

dove, come detto sopra, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum (a_{ij})^2}$

DUNQUE HO TROVATO che posso prendere $C = \|A\|_2$

un c esiste

DUNQUE, da $(*)$, si vede che i c per cui

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq c\|x\|_{\mathbb{R}^N}$$

sono i "maggioranti" dell'insieme $\{\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} : \|x\|_{\mathbb{R}^N} = 1\}$

Dato che questo insieme non è vuoto e che è limitato (dato che $C = \|A\|_2$ è nell'insieme) esiste

$$\sup\{\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} : \|x\|_{\mathbb{R}} = 1\}$$

che coincide con il minimo di $\{c : \|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq c\|x\|_{\mathbb{R}}\}$

Questo minimo lo chiamo $\|A\|$ (norma di A)

Il conto fatto sopra $(**)$ mi dice che $\|A\| \leq \|A\|_2$

Dico che $\|A\|$ è una norma in $\mathcal{M}(M,N)$

(a) $\|A\| \geq 0$ ovvio.

$\|A\| = 0$ vuol dire $\|Ax\| \leq 0 \cdot \|x\| \iff \|Ax\| = 0 \ \forall x$

e questo implica $A = 0$

(b) $\|tA\| = |t|\,\|A\|$. Se $t = 0$ è vero. Sia $t > 0$

$$\|tAx\|_M \leq c\|x\|_N \iff \|Ax\|_M \leq \frac{c}{t}\|x\|_N$$

se faccio il minimo rispetto a c trovo

$\|tA\| = \min\{c : \|Ax\| \leq \frac{c}{t}\|x\|\} = \min\{t\,c_1 : \|Ax\| \leq c_1\|x\|\}$

$= t \min\{c_1 : \|Ax\| \le c_1 \|x\|\} = t\,\|A\|$

(c) DIS. TRIANGOLARE. Prendo due matrici A_1 e A_2

$\|A_1 + A_2\|$?? Noto che, dato un $x \in \mathbb{R}^N$

$$\|(A_1+A_2)x\|_{\mathbb{R}^M} = \|A_1 x + A_2 x\|_{\mathbb{R}^M} \le \|A_1 x\|_{\mathbb{R}^M} + \|A_2 x\|_{\mathbb{R}^M}$$

$$\le \|A_1\|\,\|x\|_{\mathbb{R}^N} + \|A_2\|\,\|x\|_{\mathbb{R}^N} = (\|A_1\| + \|A_2\|)\,\|x\|_{\mathbb{R}^N}$$

MI DICE (usando la def. di $\|A_1+A_2\|$) $\|A_1+A_2\| \le \|A_1\| + \|A_2\|$

DUNQUE $\|A\|$ è una norma in $\mathcal{M}(M,N)$

Ho anche trovato che $\|A\| \le \|A\|_2 \left(= \left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}\right)$

VEDIAMO CHE VALE ANCHE UNA DISUGUAGLIANZA A SINISTRA

NOTIAMO che l'elemento $a_{ji} = (A\hat{e}_i)\cdot\hat{f}_j$

dove $\hat{e}_i = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \leftarrow i \quad i=1\dots N \qquad \hat{f}_j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \leftarrow j \quad j = 1\dots M$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A^1 & | & \;\; & | & A^N \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{\hat{e}_i} = A^i \qquad A^i = \text{colonna di } A \text{ (in } \mathbb{R}^M)$$

$(A\hat{e}_i)\cdot\hat{f}_j$ = elemento j della colonna i = a_{ji}

Allora

$$|a_{ij}| = |A\hat{e}_j \cdot \hat{f}_i| \le \|A\hat{e}_j\|\,\underbrace{\|\hat{f}_i\|}_{1} \le \|A\|\,\underbrace{\|\hat{e}_j\|}_{} = \|A\|$$

DUNQUE per ogni i,j ho $|a_{ij}| \le \|A\|$

$\Rightarrow \max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \iff \|A\|_\infty \le \|A\|$

DUNQUE

$$\|A\|_\infty \le \|A\| \le \|A\|_2$$

$$\left(\|x\|_p \le N^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \right)$$

Dato che (visto ieri) $\|A\|_2 \le \sqrt{NM}\, \|A\|_\infty$

$\Rightarrow \|A\|_\infty \le \|A\| \le (NM)^{\frac{1}{2}} \|A\|_\infty$ (LA NORMA $\|\cdot\|_\infty$ è equivalente a $\|\cdot\|$)

MA ALLORA, per opportune costanti (che escono dai conti di ieri)

$$C_1 \|A\|_p \le \|A\| \le C_2 \|A\|_p$$

$\|\cdot\|$ è equivalente a una qualunque $\| \|_p$

Per esempio

$$\frac{1}{(NM)^{1/2}} \|A\|_2 \le \|A\| \le \|A\|_2$$

VEDIAMO UN UTILIZZO DI QUESTA ROBA.

AVENDO INTRODOTTO la norma in $\mathfrak{M}(M,N)$ ho automaticamente la nozione di limite: posso dire che $A_n \to A$ se $\|A_n - A\| \to 0$ (equivale a $a^n_{ij} \to a_{ij}$ $i,j = \dots$)

Ho anche una nozione di serie di matrici $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

NOTIAMO UNA PROPRIETÀ (per le serie di matrici)

Se (A_n) è una successione di matrici $M \times N$ e se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ converge}$$

IN EFFETTI HO VISTO PRIMA CHE

$$\|A\|_\infty \le \|A\| \quad \left(|a_{ij}| \le \|A\| \quad \forall i=1..M,\ \forall j=1..N \right)$$

DUNQUE SE $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a^n_{ij}| < +\infty$

allora, dato che, per le serie numeriche, convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza, si ha

$$\text{esiste } a_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} a^n_{ij}$$

$$\text{e dunque } \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A \qquad \text{(nelle matrici)}$$

HO TROVATO CHE, $\sum_1^{\infty} \|A_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_1^{\infty} A_n$ converge

la serie delle matrici A_n

(a una matrice che indico con $\sum_1^{\infty} A_n$)

FATTO Se A è $N \times N$ e $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ è invertibile.

(I è la matrice identica). INOLTRE

$$\boxed{(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n} \qquad \Big(A^n = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n \text{ volte}},\ A^0 = I \Big)$$

$$= I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

DIM. (1) Vediamo che $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ è convergente. Per questo dimostro

che $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n\| < +\infty \leftarrow$

OSSERVO CHE $\boxed{\|A^n\| \le \|A\|^n}$. Infatti, più in generale,

$\|A\,B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ (se ha senso fare $A \cdot B$). In effetti

se x è un vettore $\|(A \cdot B)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\|\,\|Bx\| \le$

$\|A\|\,\|B\|\,\|x\|$

$\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ QUINDI $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ e basta che $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n < +\infty$ MA QUESTA è una serie geometrica di ragione $\|A\| < 1$

So che $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$. DUNQUE

$S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ esiste $\left(e \ \|S\| \leq \frac{1}{1-\|A\|} \right)$

$$S = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} A^n$$

NOTIAMO ANCHE CHE allora $\|A^n\| \leq \|A\|^n \longrightarrow 0$

Considero il prodotto $(I-A)S = \lim_{K\to\infty} (I-A)\sum_{n=0}^{K} A^n$ (calcolo ordinario)

$$= \lim_{K\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{K} A^n - \sum_{n=0}^{K} A^{n+1}\right) = \lim_{K\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{K} A^n - \sum_{n=1}^{K+1} A^n\right) =$$

$$\lim_{K\to\infty}\left(A^0 + \cancel{\sum_{n=1}^{K} A^n} - \cancel{\sum_{n=1}^{K} A^n} - A^{K+1}\right) = \lim_{K\to\infty}\left(I - A^{K+1}\right) =$$

$$I - \underbrace{\lim_{K\to\infty} A^{K+1}}_{=0}$$

$\left(A^{K+1} \to 0 \text{ perché } \|A^{K+1}\| \leq \|A\|^{K+1} \to 0 \text{ dato che } \|A\| < 1 \right)$

DUNQUE $(I-A)\cdot S = I$ $\iff S = (I-A)^{-1}$

Nello stesso modo dovo che $S(I-A) = I$

Alcune proprietà legate alle successioni (in $\mathbb{R}^N$ - in X con una norma)

<u>Def.</u> Data una successione (x_n) (in $\mathbb{R}^N$ o in X), chiamo "sottosuccessione" di (x_n) o "estratta" da (x_n) un'altra

successione (y_n) tale che $y_n = x_{k_n}$ dove

(k_n) è una successione <u>strettamente crescente di interi</u>

(n^2) è un'estratto di (n)

<u>Proprietà</u> Se (x_n) ha limite x $\Rightarrow$ ogni estratto

$y_n = x_{k_n}$ ha lo stesso limite

Il viceversa è falso. Si ha però:

Prop. Se (k_n) e (h_n) sono due succ. crescenti di interi tali che

$\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{h_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

Se poi $x_{k_n} \to \ell$ $x_{h_n} \to \ell$ $\Rightarrow x_n \to \ell$

Def. Una succ. (x_n) è <u>limitata</u> se esiste $K \geq 0$ t.c.

$\|x_n\| \leq K \quad \forall n$

<u>Fatto</u> Se $x_n \to \ell \in \mathbb{X} \Rightarrow (x_n)$ è limitata

<u>TEOREMA DI BOLZANO</u> Se $(\mathbf{x}_n)$ è una successione limitata in $\mathbb{R}^N$ (o in $\mathbb{X}$ di dimensione finita) $\Longrightarrow \exists\ (k_n)$ tale che

$(\mathbf{x}_{k_n})$ ha limite

((x_n) ammette una sottosuccessione convergente)

<u>Dim</u> Il caso $N=1$ è stato fatto in Analisi I.

Supponiamo che $N=2$. Allora ho una successione in $\mathbb{R}^2$ che posso scrivere $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. So che

(L) $\quad x_n^2 + y_n^2 \leq$ costante

e voglio trovare una k_n tale che $x_{k_n} \to x$, $y_{k_n} \to y$

Da (L) deduco che $x_n^2 \leq$ costante $\Leftrightarrow (x_n)$ è limitata in $\mathbb{R}$

Per il caso con $N=1$ so che $\exists\, k_n \uparrow$ per cui $x_{k_n} \to x$ ($\exists x \in \mathbb{R}$)

Non posso dire che y_{k_n} ha limite. Però sicuramente

(da (L)) (y_n) è limitata $\Rightarrow$ (y_{k_n}) è limitata. TROVO

ALLORA (k_{h_n}) tale che $y_{k_{h_n}} \to y$. MA

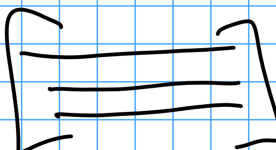
$(x_{k_{h_n}})$ è estratta da (x_{k_n}) e dunque $x_{k_{h_n}} \to x$

ALLA FINE $(x_{k_{h_n}}, y_{k_{h_n}}) \to (x, y)$ e ho finito.

QUESTO RAGIONAMENTO SI PUÒ ITERARE e in questo modo si dimostra per N qualunque

---

(x_n) LIMITATA $\Rightarrow$ (x_n) ammette una estratta convergente



$A_1 = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1N}) \in \mathbb{R}^N$

A_2

A_m

$v = (v_1 \dots v_N)$

$$\|v\|_N = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_N^2}$$

$$\|v\|_N^2 = v_1^2 + \dots + v_N^2$$