Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 06 08/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Successione : dato $n \in \mathbb{N}$ è definito $a_n \in A \subset \mathbb{R}^M$
(succ. di punti di A)

Per una successione è definito il limite per $n \to \infty$

$a_n \to \ell \in \mathbb{R}^M$ se
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \| a_n - \ell \|_{\mathbb{R}^M} < \varepsilon$
(ci sarebbe anche $a_n \to \infty$ / $a_n \to \pm\infty$ caso $a_n \in \mathbb{R}$)
$\Updownarrow$
$\|a_n\| \to +\infty$

OSS. / PROPRIETÀ (NON FACCIAMO LE DIM.)

FATTI Se $A \subset \mathbb{R}^M$ allora

(a) A è chiuso $\Longleftrightarrow$ ogni successione (a_n) in A che abbia limite
$: a_n \to \ell \Rightarrow \ell \in A$

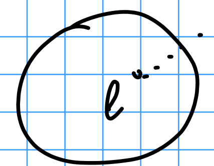
(A è chiuso se contiene tutti i possibili limiti di successione di punti di)

ANALOGAMENTE (questa implica quella sopra)

$\bar{A} = \{ l : \text{esiste } (a_n) \text{ con } a_n \in A,\ a_n \to l \}$

(b) A è aperto se per ogni successione (a_n) che abbia limite l, $a_n \to l$ e $l \in A \Rightarrow$ $a_n \in A$ "per n grande" cioè

$\underbrace{\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}}_{\text{per } n \text{ grande}} \quad a_n \in A$



(c) $x_0 \in \partial A \iff$ esistono due successioni (a^1_n) e (a^2_n) tali che $a^1_n \to x_0$, $a^2_n \to x_0$ e inoltre $a^1_n \in A \ \forall n$ / $a^2_n \notin A \ \forall n$

Data una successione (a_n) in $\mathbb{R}^N$ (o più in generale in uno spazio vettoriale X con una norma $\| \ \|$) è chiaro che è definita la nozione di limite ($a_n \to l \iff \| a_n - l \| \to 0$).

INOLTRE SI PUÒ CONSIDERA LA "SERIE DEGLI a_n".

SI DEFINISCE INFATTI LA "SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI / RIDOTTE" def. da:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(S_n è la somma dei termini di (a_n) fino all'n-esimo)

Si chiama "SERIE DEGLI a_n" la nuova succ. (S_n)

Dico che la serie degli a_n CONVERGE se (S_n) ammette limite S $(\in X)$. Quando questo avviene dico che S è la "SOMMA" della serie degli a_n

SI USA IL SIMBOLO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ per indicare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{(se esiste)}$$

Molto spesso si usa dire (impropriamente) che

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ← qui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ indica la successione degli S_n

$\{S_n\}$ $S_0=1$ $S_1=\frac{3}{2}$ $S_2=\frac{7}{4}$ ...

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge a 2. A RIGORE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

CONVENZIONE Se ho una serie di numeri reali $a_n \geq 0$ ⇒ so per certo che la succ. delle somme parziali

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{è crescente in } n \ (S_{n+1} \geq S_n)$$

⇒ S_n ha limite S, S può essere finito o $+\infty$

ALLORA – SOLO quando ho una serie di $a_n \geq 0$, posso SEMPRE dare un senso a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0,+\infty]$

DUNQUE se $a_n \geq 0$ posso sempre scrivere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($\in [0,+\infty]$)

e la serie degli a_n converge $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$!!!

SOLO SE STO SOMMANDO NUMERI ≥ 0

TORNIAMO ALLE SUCCESSIONI.

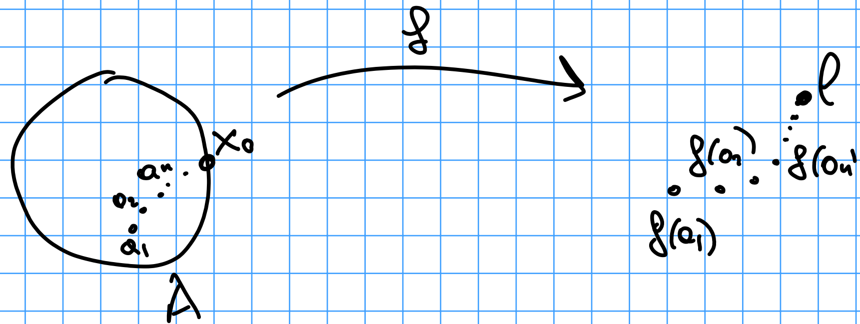
C'E' UN TEOREMA CHE METTE IN RELAZIONE I LIMITI DI FUNZIONE E I LIMITI DI SUCCESSIONI.

TEOREMA $f: A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di accumulazione per A. $l \in \mathbb{R}^M$. ALLORA

(a) $\exists$ (a_n) succ. di punti di A tale che $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$ (E QUESTA È UNA CARATTERIZZAZIONE DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE)

(b) $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff$

Per ogni successione (a_n) di punti di A, con $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to \ell$



ESEMPI DI NORME (METRICHE) diverse quella "canonica"

IN $\mathbb{R}^N$.

$\boxed{\text{Sia } p \geq 1}$

Dato $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ posso definire la "norma p-esima"

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p} = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

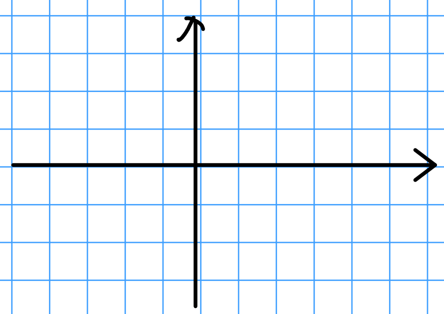
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\|\cdot\|_p$ è una norma qualunque sia $p \geq 1$ ← LA COSA DA DIMOSTRARE è la

(c) (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

NOTA La norma canonica è quella con $p = 2$, che viene detta "norma euclidea" — L'UNICA CHE PROVIENE DA UN PRODOTTO SCALARE

Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$

VEDIAMO come è fatto $\overline{B_p(0, 1)}$ (DISCO chiuso di centro $(0,0)$ e raggio 1, nella norma p)



$$(x,y) : \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p} \leq 1 \iff$$

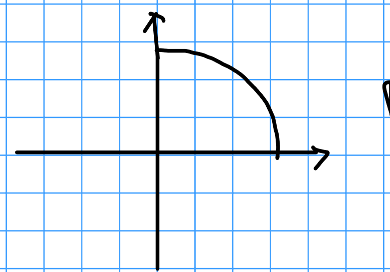
$$|x|^p + |y|^p \leq 1$$

Basta considerare $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (poi uso la simmetria)

Dunque voglio disegnare l'insieme

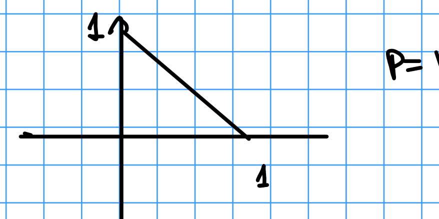
$$\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \quad x^p + y^p \leq 1\} \Leftrightarrow$$

$$\{x \geq 0, y \geq 0, \quad y \leq \underbrace{(1-x^p)^{1/p}}_{\varphi_p(x)}$$

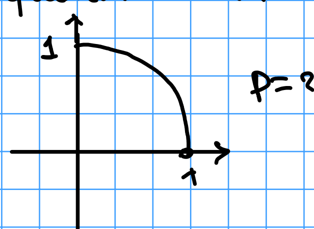


$$\varphi_p(x) = \sqrt[p]{1 - x^p}$$

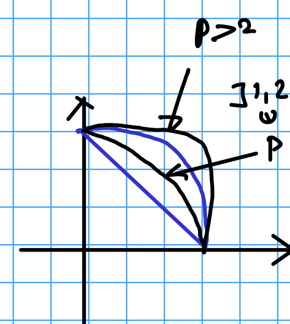
Se $p = 1$ $\quad \varphi_1(x) = 1 - x$



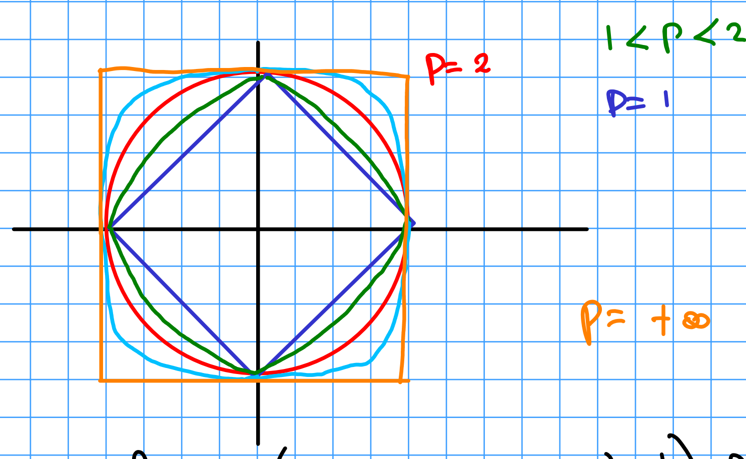
Se $p = 2$ $\quad \varphi_2 = \sqrt{1-x^2}$ e quindi il grafico rappresenta un pezzo di circonferenza



Se $1 < p < 2$ ho una situazione intermedia



Se $p > 2$ il grafico di φ_p è sopra quello della circonferenza



$p = +\infty$ $\left(\max(|x|, |y|) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \right)$

Dal disegno si vede che (e si dimostra!) che, se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$

$$B_{p_1}(0,1) \subset B_{p_2}(0,1) \quad \leftarrow \quad (*)$$

Aggiungiamo il caso $p = \infty$ ponendo

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}$$

Si vede che

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p$$

cioè

$$\lim_{p\to\infty} \left(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\right)^{1/p} = \max(|x_1|, \dots, |x_N|)$$

Per esempio $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ se $0 \leq a \leq b$ ho

$$b \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}}_{A_n} \quad (\longrightarrow b)$$

$\sqrt[n]{A_n}$ dove $1 \leq A_n \leq 2 \Rightarrow$

$$1 \leq \sqrt[n]{A_n} \leq \sqrt[n]{2} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{A_n} \to 1$$

Si dimostra che anche $\|\cdot\|_\infty$ è una norma.

RISCRIVO:

$$B_{p_1}(0,1) \subset B_{p_2}(0,1) \quad \text{se } 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$$

Cioè

$$\text{se } \|x\|_{p_1} \leq 1 \Rightarrow \|x\|_{p_2} \leq 1$$

FISSATI $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$

IN PARTICOLARE se $\|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \|x\|_{p_2} \leq 1$

$$\Leftrightarrow K := \sup\{\|x\|_{p_2} : \|x\|_{p_1} = 1\} \leq 1$$

Se prendo un qualunque $x \in \mathbb{R}^N$ $x \neq 0$, pongo

$$\hat{x} := \frac{x}{\|x\|_{p_1}} \Rightarrow \|\hat{x}\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \|\hat{x}\|_{p_2} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\| \frac{x}{\|x\|_{p_1}} \right\|_{p_2} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N}$$

per $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$

l'ho dedotto dal disegno (si dimostra ...)

LO RISCRIVO!

$\boxed{\text{se } 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty \text{ ho che } \|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}}$

(che poi mi dà l'inclusione tra i dischi ...)

PERÒ VALE ANCHE UNA DISUGUAGLIANZA NELL'ALTRO VERSO: Prendo $1 \leq p \leq +\infty$ e faccio un confronto tra p e $+\infty$:

se $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad \|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\right)^{1/p} \leq \left(\|x\|_\infty^p + \dots + \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} =$

(perché $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_N|)$)

$\left(N \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = N^{1/p} \|x\|_\infty$

DUNQUE

$$\|x\|_p \leq N^{1/p} \|x\|_\infty$$

se aggiungo questa proprietà a quanto trovato prima ho $(p_2 = +\infty)$

$$(*) \rightarrow \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq N^{1/p} \|x\|_\infty$$

questa proprietà si esprime dicendo che $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$

sono "EQUIVALENTI" - PIÙ IN GENERALE due norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ sono equivalenti se esistono due costanti C_1 e C_2 tali che

$$C_1 \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2 \|x\|_2 \quad \forall x$$

DA ⓐ (e da quello di prima) si ricava facilmente che

$$p_1 \le p_2 \Rightarrow$$

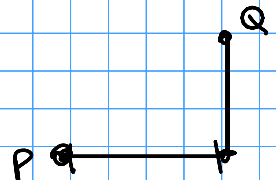
$$\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} \overset{\left(N^{1/p}\|x\|_\infty\right)}{\le} N^{1/p} \|x\|_{p_2} \quad \forall x$$

DUNQUE tutte le $\| \ \|_p$ sono tra loro equivalenti

QUESTA EQUIVALENZA MI DICE CHE

$$f(x) \xrightarrow{\| \ \|_{p_1}} e \iff f(x) \xrightarrow{\| \ \|_{p_2}} e$$

TUTTE QUESTE NORME p (al variare di p da 1 a ∞) mi danno la STESSA nozione di limite



$\|P-Q\|_1$

OSS. Se uso la norma ∞ è evidente che

$$x_n \to l \iff \text{tutte le componenti } x_{i,n} \to l_i$$
$$i = 1 \dots M$$

dove $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{M,n})$ $\quad l = (l_1, \dots, l_M)$

INFATTI $x_n \to l \iff \|x_n - l\|_\infty \to 0 \iff$

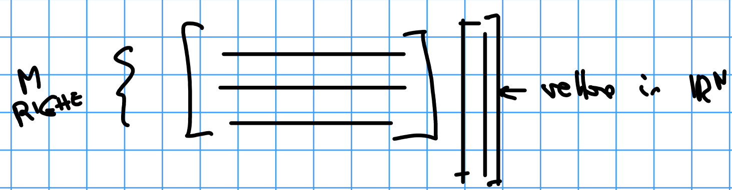
$$\max_{i=1..M} |x_{i,n} - l_i| \to 0 \iff \forall i = 1..M \quad |x_{i,n} - l_i| \to 0$$

NORME DIVERSE DANNO ORIGINE ALLA STESSA NOZIONE DI LIMITE.

<u>ESEMPIO</u> Dati M ed N interi considero

$$\mathbb{X} = \mathcal{M}(M,N) = \{\text{matrici } M \times N\} \leftarrow \begin{array}{l} M \text{ RIGHE} \\ N \text{ COLONNE} \end{array}$$

Come noto, se $A \subset \mathbb{X}$, A induce una funzione da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ definita da $x \mapsto Ax$ $\quad x \in \mathbb{R}^N$



$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hline \\ \hline A_M \end{bmatrix}$$

${}^tA_1, \dots, {}^tA_M$ le righe sono vettori di $\mathbb{R}^N$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad Ax \in \mathbb{R}^M$ di componenti $A_1 \cdot x, A_2 \cdot x, \dots, A_M \cdot x$

M = NUMERO DI RIGHE = dim dello spazio di arrivo

N = NUMERO DI COLONNE = dim. dello spazio di partenza.

Se A è una tale matrice si definisce la norma (matriciale) di A come

" la minima costante C per cui $\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq C \|x\|_{\mathbb{R}^N}$ $\forall x$

Vediamo che questa definizione ha senso. NOTIAMO CHE

C è tale che $\|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq C \|x\|_{\mathbb{R}^N}$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \iff \|Ax\|_{\mathbb{R}^M} \leq C$ $\forall x$ con $\|x\|_N = 1$

INFATTI $\Rightarrow$ è ovvia. Per la $\Leftarrow$ prendo $x \in \mathbb{R}^N$

Se $x = 0$ non c'è niente da dim. Se $x \neq 0$ considero $\hat{x} = \dfrac{x}{\|x\|_N}$

e so che $\|A\hat{x}\|_M \leq C \Rightarrow \left\| A \dfrac{x}{\|x\|_M} \right\| \leq C \Rightarrow \|Ax\|_M \leq C \|x\|_N$

HO DIMOSTRATO LA PROPRIETÀ SOPRA

CONCLUDIAMO DOMANI (VOGLIO CAPIRE IL SIGNIFICATO DI $\|A\|$)