Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 07/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

LIMITI "INFINITI"

A SECONDA DEI CASI SI DEFINISCONO DEI LIMITI INFINITI "IN PARTENZA" ~~e~~ o in arrivo

UTILIZZEREMO $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\overline{\mathbb{R}^N} = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$

Definiamo $B(+\infty, r)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo

$(r>0)$

$B(+\infty, r) = \{ x \in \mathbb{R} : x > 1/r \}$

$B(-\infty, r) = \{ x \in \mathbb{R} : x < -1/r \}$

$B(\infty, r) = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| > 1/r \}$

con queste def. posso dire:

- $+\infty / -\infty / \infty$ è di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{R}/\mathbb{R}^N$ se per ogni $r>0$ esiste $x \in B(\pm\infty, r) \cap A$

$(x \neq \pm\infty)$

In altri termini A è illimitato superiormente / illimitato inferiormente / illimitato

- se $\boxed{A \subset \mathbb{R}}$ $\pm\infty$ è di accumulazione per A,
se $f : A \to \mathbb{R}^M$, $\ell \in \mathbb{R}^M$

posso definire $\lim_{x \to +/-\infty} f(x) = \ell$

con lo stesso def. (usando $B(\substack{+\infty \\ -\infty}, r)$ definito sopra)

cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c$: se $\substack{x > c \\ (x < c)}$, $x \in A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

- $A \subset \mathbb{R}^N$ ∞ è di acc. per A, e se
$f : A \to \mathbb{R}^M$, $\ell \in \mathbb{R}^M$, posso definire

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ t.c. $\forall x$ con $\|x\| > r$, $x \in A$
si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

- se $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di accumulazione per A
$f : A \to \mathbb{R}$ posso dire che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty / -\infty$$

$\forall c > 0 \quad \exists r > 0$ t.c. $\forall x \in B(x_0, r)$
$x \neq x_0$ $x \in A \Rightarrow f(x) > c \ / \ f(x) < -c$

- $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di acc. per A, $f : A \to \mathbb{R}^M$

posso definire $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ se

$\forall c \ \exists r$: se $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, $x \in A \Rightarrow$
$\|f(x)\| > c$

- Ci sono anche limiti in cui ∞ sono sia in partenza che in arrivo

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix}+\infty \\ -\infty \\ \infty\end{smallmatrix}} f(x) = \begin{smallmatrix}+\infty \\ -\infty \\ \infty\end{smallmatrix}$$

Per esempio, se $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$
A è illimitato, dire che

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty} \,/\, -\infty$$

vuol dire che $\forall c > 0 \ \exists r > 0$ tale che

se $\|x\| > r$, $x \in A \Rightarrow f(x) > c \,/\, f(x) < -c$

con queste definizioni valgono i risultati visti in Analisi 1:

$+\infty + \infty = +\infty$ $\big(f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$
$\Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty \big)$

Non vale $\infty + \infty = \infty$ per esempio
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad$ (per $x \to 0^+$)

con le definizioni sopra $f(x) \to \infty$
$g(x) \to \infty$ $\quad$ MA $f+g \to 0$

(potrei fare l'esempio in $\mathbb{R}^N$ mettendo

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y} \qquad g(x,y) = -\frac{1}{x+y}$$

per $(x,y) \to (0,0)$

- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- se $f(x) \to 0^+$ $\left(f(x) \to 0 \text{ e } f(x) > 0 \right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to +\infty$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^- \qquad \left(\frac{1}{\infty} = 0 \right.$$

NATURALMENTE se $f : A \to \mathbb{R}$ $)$

- se $f : A \to \mathbb{R}$ $g : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di acc. per A)
  $f(x) \to \ell \neq 0$ $g(x) \to +\infty / -\infty$

$$\Rightarrow f(x)\, g(x) \to \begin{cases} +\infty / -\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty / +\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases}$$

SUCCESSIONI Chiamo successione di punti di A, dove $A \subset \mathbb{R}^N$

una funzione $a : \mathbb{N} \to A$.

Tradizionalmente si scrive a_n invece di $a(n)$

e si scrive (a_n) invece di a

Per esempio $\left(\frac{1}{n}\right)$ è una successione in $]0,1]$

Per le successioni è definito $\lim_{n \to +\infty} a_n$

perché $+\infty$ è l'unico pto di accumulazione per $\mathbb{N}$

(a volte non metto $+\infty$ ma solo ∞)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} , \frac{n^2}{n^4+3} \right)}_{\text{successione in } \mathbb{R}^2} = (1,0)$$