Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04 02/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

LIMITI IN PIÙ VARIABILI

$f : A \to \mathbb{R}^M$, dove $A \subset \mathbb{R}^N$, x_0 di accumulazione per A. $\ell \in \mathbb{R}^M$ è detto limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$ tale che

se $\|x - x_0\| < r$, $x \in A$, $x \neq x_0$ allora $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

La scrittura $\boxed{f : A \to \mathbb{R}^M \quad A \subset \mathbb{R}^N}$ vuol dire che

$f = f(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^M$ (ci sono N variabili)

$\| $

$\left(f_1(x_1, \dots, x_N), f_2(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N) \right)$

Le $f_1 \dots f_M$ sono funzioni da $A \to \mathbb{R}$, che vengono dette le "componenti" di f

Anche $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_M)$

OSS. Dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ è equivalente a dire che

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \qquad \text{per } i = 1, \dots, M$$

(da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$)

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = \underbrace{\sin\left(\frac{1}{xyz}\right)}_{\text{scalare}} \underbrace{\left(x+z,\ y-x,\ xz\right)}_{\text{vettore di } \mathbb{R}^3} =$$

$$\left((x+z)\sin\left(\frac{1}{xyz}\right), (y-z)\sin\left(\frac{1}{xyz}\right), xz\sin\left(\frac{1}{xyz}\right)\right)$$

Questa f è definita su $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0\}$.

Posso considerare $\mathbf{0} = (0,0,0)$ e chiedermi se esiste

$$\lim_{P \to \mathbf{0}} f(P) = ?? \qquad P = (x,y,z)$$

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} f(x,y,z) = ??$$

Devo chiedermi se $\mathbf{0}$ è pto di acc. per A. Sì (si vede...)

Dopo di che devo vedere se esistono

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \underbrace{(x+z)\sin\left(\frac{1}{xyz}\right)}_{f_1(x,y,z)}$$

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \underbrace{(y-z)\sin\left(\frac{1}{xyz}\right)}_{f_2(x,y,z)}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} xy \sin\left(\frac{1}{xyz}\right) \leftarrow f_3(x,y,z)$$

Dico che tutti e tre i limiti esistono e fanno zero. Infatti

$$|f_1(x,y,z)| \le |x+z| \left|\sin\left(\frac{1}{xyz}\right)\right| \le |x+z| \le |x|+|z| \leftarrow$$

Si vede facilmente che $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |y| = 0$ $\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |z| = 0$

infatti $|x| \le \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ DUNQUE dato $\varepsilon > 0$ posso prendere $r = \varepsilon > 0$ e ottengo che $\|(x,y,z)\| < r \Rightarrow |x| < \varepsilon$

FATTO GENERALE Se $i = 1 \dots N$ allora

$$\lim_{(x_1 \dots x_N)\to(x_1^0 \dots x_N^0)} x_i = x_i^0 \qquad i = 1 \dots N$$

(si vede facilmente dalla def. $|x_i - x_i^0| \le \|P - P_0\|$)

TORNANDO a f_1 ho visto che

$$0 \le |f_1(x,y,z)| \le |x| + |z|$$

ed è chiaro che $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (|x|+|z|) = 0$

Per un "principio di monotonia" $\Rightarrow f_1(x,y,z) \to 0$

NOTA: $f(P) \to \underset{(0\dots0)}{0} \Leftrightarrow \|f(P)\| \to \underset{0 \in \mathbb{R}}{0}$ per $P \to P_0$ (si vede dalla def.)

ANALOGAMENTE ho

$$|f_2(x,y,z)| \le |y-z| \le |y| + |z| \to 0$$

$$|f_3(x,y,z)| \le |xy| = |x|\,|y| \to 0$$

DUNQUE $-f$ è quello sopra — ho dovuto che

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Big| \quad \lim_{P\to 0} f(P) = 0 \leftarrow (0,0,0)$$

Avrei potuto ragionare su f vettoriale scrivendo

$$\|f(x,y,z)\| \le \|(x+y,\, y-z,\, xy)\| \leftarrow$$ e mostro che questo tende a zero

$$\sqrt{(x+y)^2+(y-z)^2+x^2y^2}$$

PROPRIETÀ DEL LIMITE

- UNICITÀ DEL LIMITE se $f(x)\to \ell_1$ e $f(x)\to \ell_2$ per $x\to x_0$

  Allora $\ell_1=\ell_2$

- $f(x)\to \ell$ per $x\to x_0 \iff \|f(x)-\ell\|\to 0$ per $x\to x_0$

- $f(x)\to \ell$ per $x\to x_0 \iff f_i(x)\to \ell_i$ per $x\to x_0$ e $i=1,\dots,M$

- Se $f,g,h : A \to \boxed{\mathbb{R}}$ x_0 pto di acc. per A

  e se $f(x)\le g(x)\le h(x)$ $\forall x\in A$

  e se $f(x)\to 0$, $h(x)\to 0$ per $x\to x_0$, anche

  $g(x)\to 0$ per $x\to x_0$

- Se $f(x)\le g(x)$ (ancora $f,g : A\to\boxed{\mathbb{R}}$) e se $f(x)\to \ell_1$, $g(x)\to \ell_2$ per $x\to x_0$ $\Longrightarrow \ell_1\le \ell_2$

• (permanenza del segno) (sempre $f, g : A \to \mathbb{R}$)

Se $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ e se $\ell_1 < \ell_2$

allora esiste $r > 0$ tale che

$f(x) < g(x)$ per tutte le $x \in A$ $x \neq x_0$ $\|x - x_0\| < r$

($f < g$ in "un intorno di x_0")

• Se $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ (in $\mathbb{R}^m$)
$\lambda(x) \to \lambda$, $\mu(x) \to \mu$ (in $\mathbb{R}$) per $x \to x_0$

allora

$\lambda(x) f(x) + \mu(x) g(x) \longrightarrow \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$ (in $\mathbb{R}^n$)

• Se $f(x) \to \mathbf{0}$ (in $\mathbb{R}^m$) e $\lambda(x)$ è limitato $x \to x_0$

(oppure il contrario: $\|f(x)\|$ limitato e $\lambda(x) \to 0$)

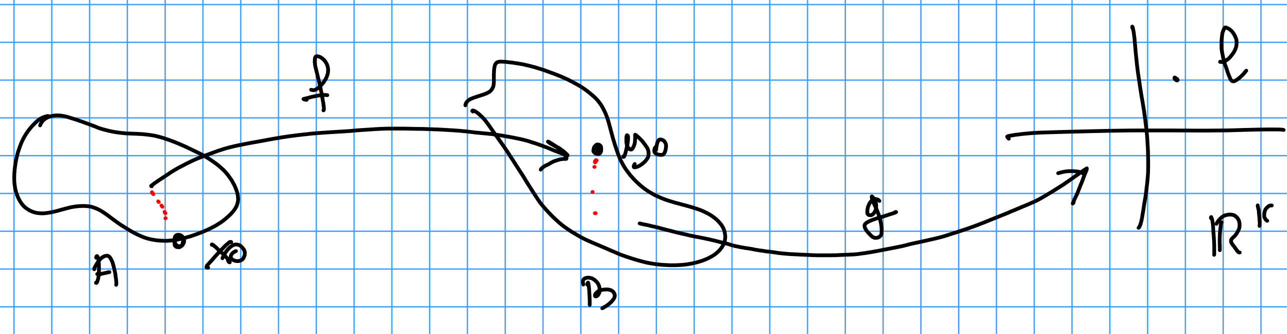
ALLORA $\lambda(x) \cdot f(x) \to \mathbf{0}$

• Se $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) \to \ell_1 \cdot \ell_2$

• (COMPOSIZIONE - CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI)

Abbiamo $f : A \to B$ $g : B \to \mathbb{R}^k$ con

$A \subset \mathbb{R}^N$ $B \subset \mathbb{R}^M$



DUNQUE è ben definita $h := g \circ f$ ($h(x) = g(f(x))$)

SUPPONIAMO CHE

- x_0 sia un punto di accumulazione per A
- y_0 sia un punto di accumulazione per B
- $\ell \in \mathbb{R}^k$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$
- $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$ (basterebbe $x \neq x_0$ in un intorno di x_0)

ALLORA $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ $\left(\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell \right)$ Per es. è vero se $y_0 \notin B$

se non metto l'ipotesi il teorema è falso

COSA PUÒ ANDARE MALE ?? Vediamo un esempio

$A = B = \mathbb{R} = \mathbb{R}^k$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1$

$f(x) = 0 \quad \forall x$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \\ 1 & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$$

Con le definizioni fatte si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim_{y \to 0} g(y) = 1$ $\left(\text{Non conta che } g(0) = 0 \right)$

DIVERSI !!

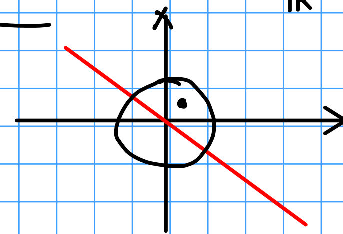
MA $g(f(x)) = g(0) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(f(x)) = 0$

IL TEOR. DI COMPOSIZIONE HA VARIE APPLICAZIONI

- "CAMBIO DI VARIABILE"

Supponiamo di dovere trovare $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sin(x^2 - y^2)}{x + y}$

IN QUESTO CASO $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}$ $\mathbb{R}^2$



definito in $A = \{(x,y) : x+y \neq 0\}$

$(0,0)$ è $\boxed{\text{di acc. per } A}$: se prendo un qualunque $r>0$ posso prendere $\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right) \in A$ $\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r > 0\right)$

e $\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right) \in B((0,0),r)$ dato che

$$\left\|\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right\| < r \iff \left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2 < r^2 \iff \frac{r^2}{2} < r^2 \quad \text{VERA}$$

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}} < r\right)$$

VEDIAMO se esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ??$

Cerco di ricondurmi al limite noto $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$

Da questo limite in t deduco che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 1$

Lo deduco applicando il teorema di composizione :

$g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ $\quad f(x,y) = x^2-y^2$ . . . .

$B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. SIAMO NELLE IPOTESI

DA QUESTO LIMITE $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 1$

OTTENGO (per prodotto) che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}(x-y) = 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$$

$$\|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y)^2}{x+y} = 0$$

Per fare questo limite avrei potuto ragionare così:

$$\frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} = \underbrace{\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}}_{(1)} \underbrace{(x-y)}_{(2)}$$

Nel limite (1) "sostituisco" $t = x^2-y^2$. Quando $(x,y)\to(0,0)$ $t\to 0$

(1) diventa $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ (devo stare attento che se $(x,y) \notin A$ $t \neq 0$)

Il limite (2) fa evidentemente zero

$\Rightarrow$ il limite di partenza fa $1\cdot 0 = 0$

- c'è tipicamente un uso "negativo" del teorema di composizione

INFATTI DAL TEOREMA SI DEDUCE che.

SE $g(y)\to l$ $y\to y_0$

allora per ogni $f: A\to B$ con $f(x)\to y_0$ per $x\to x_0$

(+ ipotesi $f(x)\neq y_0$)

ALLORA $g(f(x))\to l$ per $x\to x_0$

MA ALLORA SE TROVO DUE funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ che entrambe tendono a y_0 quando $x\to x_0$ MA TALI CHE

$$\lim_{x\to x_0} g(f_1(x)) \neq \lim_{x\to x_0} g(f_2(x))$$

allora **non può esistere** $\lim_{y\to y_0} g(y)$

ESEMPI (di questo secondo uso del teorema di composizione)

(LIMITI DELLE RESTRIZIONI ALLE RETTE)

Consideriamo $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) : (x,y)\neq(0,0)\}$

È chiaro che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0\cdot 0 = 0$

(FATTO Dato $i = 1 \dots N$ si ha $\lim_{(x_1 \dots x_N)\to(x_1^0, \dots x_N^0)} x_i = x_0^i$)

e anche $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0$

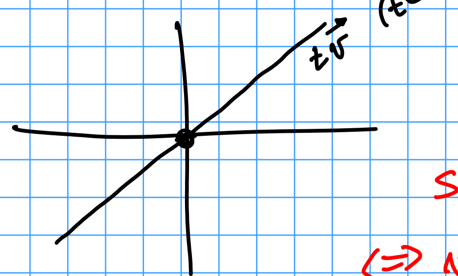
Però $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ NON si capisce cosa faccia...

PROVIAMO A "FARE I LIMITI SULLE RETTE" USCENTI DA $(0,0)$

Dato un vettore $\vec v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ consideriamo

$$h(t) = f(\underbrace{(0,0)+t\vec v}_{\gamma(t)}) = f(tv_1, tv_2)$$

($\gamma(t) = \underbrace{P_0}_{=(0,0)} + t\vec v$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ descrive i punti della retta passante per P_0 con "direzione" $\vec v$)



Sto prendendo $\vec v \neq 0$

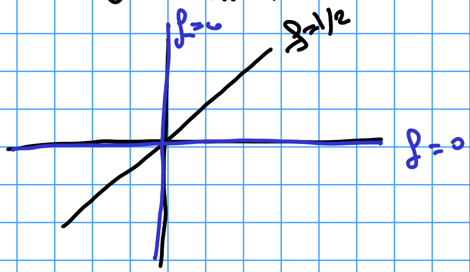
$\iff v_1^2+v_2^2 > 0$

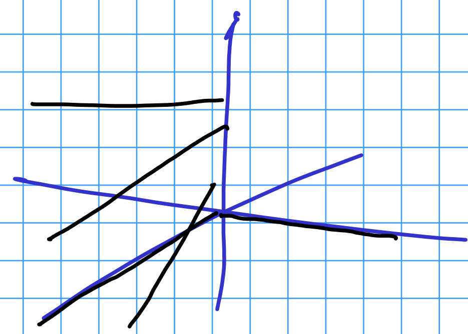
Vediamo se esiste $\lim_{t\to 0} f(0+t\vec v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{(tv_1)(tv_2)}{(tv_1)^2+(tv_2)^2} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$ (t si è semplificato!!)

Però questo limite in t <u>DIPENDE DA $\vec{v}$</u>

(a seconda di $\vec{v}$ trovo limiti diversi) ADDIRITTURA SU OGNI RETTA $f(x,y)$ è costante (ma la costante dipende dalla retta)





$\Rightarrow$ **NON ESISTE** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$