Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 03 01/10/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

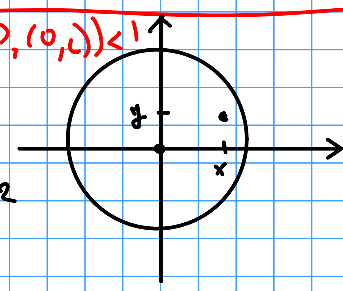
ESEMPIO $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

(disco di centro $(0,0)$ e raggio 1 : $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<1$)

- Verifichiamo che A è aperto $\iff$ ogni punto $P=(x,y)$ che appartenga ad A è INTERNO ad A $\iff$

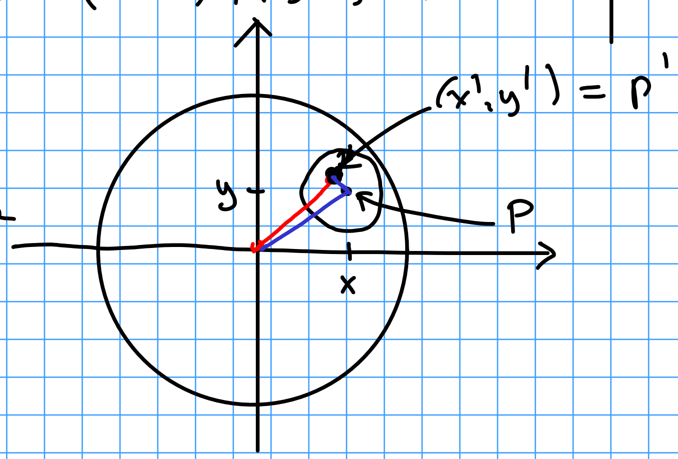
$$\boxed{\text{Per ogni } P=(x,y)\in A \text{ esiste } r>0 \text{ per cui } B(P,r)\subset A}$$

Infatti se $P\in A$ vuol dire che $x^2+y^2<1$ ← $d(P,(0,0))<1$



Prendiamo $r>0$ e supponiamo che $P'=(x',y')$ appartenga a $B(P,r) \iff (x'-x)^2+(y'-y)^2<r^2$

Valutiamo la distanza di P' da $(0,0)=\mathbf{0}$ e cioè calcoliamo



$$\begin{aligned} d(P',(0,0)) &= \sqrt{(x')^2+(y')^2} \\ &\le d(P',P)+d(P,\mathbf{0}) \\ &< r + d(P,\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Dato che $d(P,O) < 1$ posso scegliere $r>0$ in modo che $r + d(P,O) < 1$. Se faccio questa scelta (per esempio $r := \frac{1-d(P,O)}{2}$) TROVO

$$\text{se } d(P',P) < r \Rightarrow d(P',O) < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$B(P,r) \subset B(O,1) = A$$

Dunque A è aperto

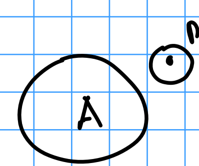
- Chi è la frontiera di A ?

SICURAMENTE - dato che A è aperto - $\partial A \cap A = \emptyset$

(se P è di frontiera $\Rightarrow P \notin A \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1$)

- Vediamo che, se $x^2+y^2 > 1$ P è esterno ad A

cioè esiste $r>0$ per cui $B(P,r) \cap A = \emptyset$



Il ragionamento è simile al precedente:

Scelgo $r>0$ in modo che $d(P,O) - r > 1$

(lo posso fare perché $d(P,O) > 1$).

Prendo $P' \in B(P,r)$. Allora

$$1 < d(P,O) \leq d(P,P') + d(P',O) \Rightarrow$$

$$d(P',O) \geq d(P,O) - \underbrace{d(P,P')}_{<r} > d(P,O) - r > 1$$

Ho DIM. che $P' \in B(P,r) \Rightarrow P' \notin A$

$$\Updownarrow$$

$$B(P,r) \cap A = \emptyset$$

- Da tutto questo ho trovato che i punti di frontiera $P=(x,y)$ devono verificare $x^2+y^2 = 1 \iff d(P,O) = 1$

cioè $\partial A \subset \{x^2+y^2=1\}$

- Vediamo che vale anche il viceversa: $\{x^2+y^2=1\} \subset \partial A$

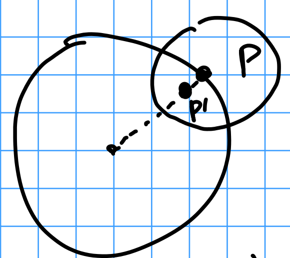
Per questo devo ragionare come segue:

Prendo P t.c. $\|P\|=1$, e prendo un qualunque $r>0$

Devo trovare $P', P'' \in B(P,r)$ con $P' \in A$, $P'' \notin A$

Per quanto riguarda P'' posso sempre prendere $P''=P$ (qualunque sia r) dato che $P \notin A$.

Per trovare P' lo trovo sul segmento tra P e O



ne segue $\|P'\| = t\|P\| = t < 1$

in altri termini $P' = tP$ con $0<t<1$ in modo che $\|P - tP\| < r$

$$\|(1-t)P\| < r$$

$$(1-t)\|P\| < r$$

$$1-t < r \iff 1-r < t < 1$$

Posso sempre scegliere t con queste due proprietà $\left(t = 1-\frac{r}{2}\right)$

DUNQUE $\quad \partial A = \{P : \|P\|=1\} = \{x^2+y^2=1\}$

- Allora

$$\bar{A} = \{P : \|P\| \le 1\} = \{x^2+y^2 \le 1\}$$

(usando la definizione di chiusura)

- Si può vedere facilmente che,

se $A_1 = \{x^2+y^2 \le 1\}$

allora $\mathring{A}_1 = A \qquad \partial A_1 = \partial A$

Quindi A_1 è chiuso.

OSS. A è aperto $\iff \complement A$ è chiuso
A è chiuso $\iff \complement A$ è aperto

(si vede subito dalle definizioni

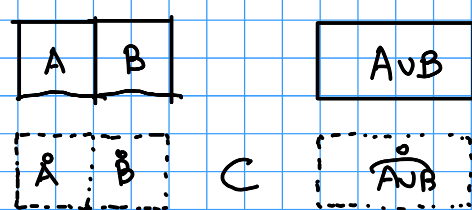
- $\partial A = \partial \complement A$
- $\overline{\complement A} = \complement \mathring{A}$
- $\mathring{\overbrace{\complement A}} = \complement \overline{A}$

Mettiamo in evidenza varie proprietà. Dati $A, B \subset \mathbb{R}^N$

(1) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \mathring{\overbrace{A \cup B}}$ $\qquad$ $\underbrace{\mathring{A} \cap \mathring{B} = \mathring{\overbrace{A \cap B}}}_{\text{si dimostra applicando la def.}}$

come può non valere "=" ??

Prendiamo A e B due quadrati, chiusi, contigui come nel disegno



(2) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$

(si ricava dalla proprietà 1, passando ai complementari

(5) ∂A è un insieme chiuso (qualunque sia A)

infatti $\complement \partial A = \mathring{A} \cup \mathring{\overbrace{\complement A}}$ ← UNIONE DI DUE APERTI È UN APERTO

(3) Se A e B sono aperti $\Rightarrow$ $A \cup B$ è aperto, $A \cap B$ è aperto
(4) Se A e B sono chiusi $\Rightarrow$ $A \cup B$ è chiuso, $A \cap B$ è chiuso

In realtà vale qualcosa di più:

UNIONE ARBITRARIA DI APERTI È APERTO
INTERSEZIONE ARBITRARIA DI CHIUSI È CHIUSO

Per esempio se $A_n =]-1/n, 1/n[$ $\qquad n \geq 1$, n intero

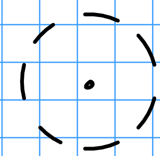
Se UNISCO TUTTI GLI A_n TROVO $]-1,1[$

Se li INTERSECO TUTTI TROVO $\{0\}$ che non è aperto

(6) $\partial \mathring{A} \subset \partial A \qquad \partial \bar{A} \subset \partial A$

$$\uparrow$$

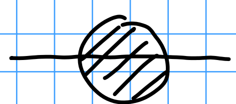
$$A = \{ 0 < x^2 + y^2 < 1 \}$$



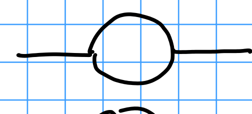
$\leftarrow A$

Si vede che
$$\partial A = \{x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$$
$$\bar{A} = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$$
$$\partial \bar{A} = \{x^2+y^2 = 1\} \subsetneq \partial A$$

(controesempio alla seconda inclusione)

$A =$ 

$\mathring{A} =$ 

$\partial A =$ 

$\partial \mathring{A}$ 

(controesempio alla prima inclusione)

VEDIAMO COME SI COMPORTA LA FRONTIERA RISPETTO A UNIONE E INTERSEZIONE

(7) $$\partial(A \cup B) \subset (\partial A \setminus \mathring{B}) \cup (\partial B \setminus \mathring{A})$$

Per dimostrarlo faccio così:

$$\partial(A\cup B) = \overline{A \cup B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(A\cup B)}} = \bar{A} \cup \bar{B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(A\cup B)}} \subset$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = \bar{A}\cup\bar{B} \cap \complement(\mathring{A}\cup\mathring{B}) = (*)$$

$$\left(\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A\cup B}} \iff \complement(\mathring{A}\cup\mathring{B}) \supset \complement\, \overset{\circ}{\overbrace{(A\cup B)}} \right)$$

$$(*) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B}) =$$
$$\left(\bar{A} \cap (\complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B})\right) \cup \left(\bar{B} \cap (\complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B})\right) =$$
$$\left((\bar{A} \setminus \mathring{A}) \setminus \mathring{B}\right) \cup \left((\bar{B} \setminus \mathring{B}) \setminus \mathring{A}\right) =$$
$$(\partial A \setminus \mathring{B}) \cup (\partial B \setminus \mathring{A})$$

DUNQUE

$$\partial(A\cup B) \subset (\partial A \setminus \mathring{B}) \cup (B \setminus \mathring{A})$$

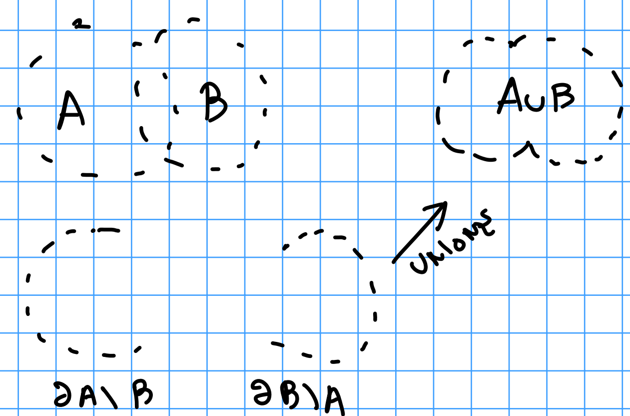
Vale "=" se so che $\mathring{A}\cup\mathring{B} = (A\cup B)^\circ$ ← VERA se A e B sono aperti

se A e B sono aperti $A=\mathring{A}$ $B=\mathring{B}$ $(A\cup B)^\circ = A\cup B$

e dunque $\mathring{A}\cup\mathring{B} = (A\cup B)^\circ$

CIOÈ, se A e B sono aperti vale:

$$\partial(A\cup B) = (\partial A\setminus B)\cup(\partial B\setminus A)$$



TORNA

Nel caso dell'intersezione ho:

$$\partial(A\cap B)\subset(\partial A\cap\bar{B})\cup(\partial B\cap\bar{A})$$

(per dimostrarlo faccio un ragionamento simile al precedente)

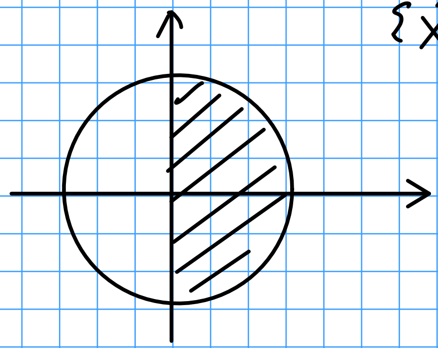
vale l'uguale se $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}$.

Nel caso in cui A e B sono chiusi, questa è vera, e allora

(8) $\boxed{A, B \text{ chiusi} \Rightarrow \partial A\cap B = (\partial A\cap B)\cup(\partial B\cap A)}$

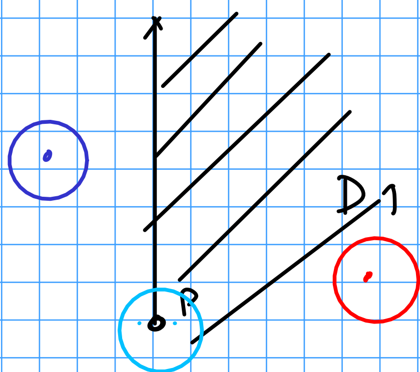
Esempio $D = \{ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0 \} =$

$$\underbrace{\{x^2+y^2 \le 1\}}_{D_1} \cap \underbrace{\{x \ge 0\}}_{D_2} = D_1 \cup D_2$$



Avevamo visto $(\simeq)$ $\quad \partial D_1 = \{x^2+y^2 = 1\}$

Dico che $\partial D_2 = \{(x,y) : x = 0\}$ = asse y



Si ragiona come nell'altro esempio:

- se (x,y) è t.c. $x<0 \Rightarrow (x,y)$ è esterno a D_2
- se (x,y) è t.c. $x>0 \Rightarrow (x,y)$ è interno a D_2

$\Rightarrow \partial D_2 \subset \{(x,y) : x = 0\}$

- Se prendo $P = (0,y)$ ci sono punti $(-r,y) \notin D_2$ e $(r,y) \in D_2$ con $r>0$ piccolo vicini quanto voglio a $(0,y)$

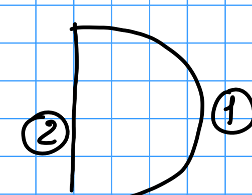
$\partial D_1 = \{x^2+y^2 = 1\} \quad \partial D_2 = \{x = 0\}$

CI FIDIAMO CHE D_1 e D_2 sono chiusi

$$\Rightarrow \partial D = (\partial D_1 \cap D_2) \cup (\partial D_2 \cap D_1) =$$

$$\{x^2+y^2 = 1,\ x \ge 0\} \cup \{x = 0 \quad x^2+y^2 \le 1\} =$$

$$\underbrace{\{x^2+y^2 = 1,\ x \ge 0\}}_{①} \cup \underbrace{\{(0,y) : -1 \le y \le 1\}}_{②}$$



CI SERVE LA NOZIONE DI LIMITE

(IN PIÙ VARIABILI)

Def. (punto di accumulazione)

$A \subset \mathbb{R}^N$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^N$ Dico che x_0 è punto di ACCUMULAZIONE per A se

$\forall r>0$ esiste x tale che

$$x \neq x_0, \; x \in A, \; x \in B(x_0, r)$$

Ogni disco $B(x_0,r)$ contiene un punto di A diverso da x_0.
(di conseguenza ogni $B(x_0,r)$, $r>0$, contiene infiniti punti di A)

Def. (LIMITE) Sono dati: N, M interi (non devono essere $=$)

- $A \subset \mathbb{R}^N$ (il dominio della funzione)
- x_0 di accumulazione per A (il "punto limite")
- $f : A \to \mathbb{R}^M$ (la funzione)
- $\ell \in \mathbb{R}^N$ (il limite)

Dico che "ℓ è il limite per x che tende a x_0 di f"

OPPURE

"$f(x)$ tende a ℓ per x che tende a x_0"

e scrivo $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ tale che

per ogni $x \in A$, $x \neq x_0$, $\|x - x_0\| < r$ si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

OSS. IN QUESTA DEF. L'EVENTUALE VALORE $f(x_0)$ NON HA NESSUN

RUOLO. (ℓ non dipende da $f(x_0)$)

Scrivo anche $\quad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \right)$