Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 30/09/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(*) $\mathbb{R}^N$ ← spazio vettoriale di dim N

- c'è una nozione di NORMA: è una funzione che ~~dato~~ ~~dato~~ UN punto x, $\mathbb{X}$ $(\mathbb{R}^N)$ è dato un numero $\|x\|$ detto "norma di x" che ha le seguenti proprietà:

(a) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$

(b) $\|tx\| = |t| \, \|x\|$ se $t \in \mathbb{R}$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ se $x, y \in \mathbb{X}$

DI SOLITO $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ se $x = (x_1, \dots, x_N)$

c'è il "PRODOTTO SCALARE" che è una funzione (di due variabili) la quale dati x, y in $\mathbb{X}$ $(\mathbb{R}^N)$ associa un numero ~~N~~ $x \cdot y$ detto "prodotto scalare tra x e y" che ha le seguenti ~~prop~~ proprietà:

(a) $(x, y) \mapsto x \cdot y$ è lineare sia in X che in Y

(è BILINEARE)

(b) $x \cdot y = y \cdot x$ (SIMMETRICA)

(c) $x \cdot x \geq 0$ e $x \cdot x = 0$ solo se $x = 0$

NEL CASO DI $\mathbb{R}^N$ $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ se

$$x = (x_1, \dots, x_N) \qquad y = (y_1, \dots, y_N)$$

VISTO che vale

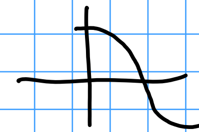
DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ:

Se in $\mathbb{X}$ c'è un prodotto scalare "$\cdot$" allora

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Dunque posso definire l'angolo θ tale che ~~$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$~~

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} \qquad 0 \le \theta < \pi$$



INOLTRE Dato il prodotto scalare ho automaticamente una norma $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. È facile vedere che questa norma verifica la (a) e (b). Vediamo che vale la (c) (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

Prendo $x, y \in X$ e considero

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = \|x\|^2 + 2\, x \cdot y + \|y\|^2 \le \text{(Schwartz)}$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Dato che $\|x+y\| \ge 0$, $\|x\| + \|y\| \ge 0$ posso fare la radice

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

#

Dati due punti x, y CHIAMO "DISTANZA TRA x e y" il numero

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

- $d(x,y) \ge 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ ← si deducono da quelle della norma
- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

TORNIAMO SU $\mathbb{R}^N$ INTRODUCIAMO LA "TOPOLOGIA" di $\mathbb{R}^N$

Consideriamo

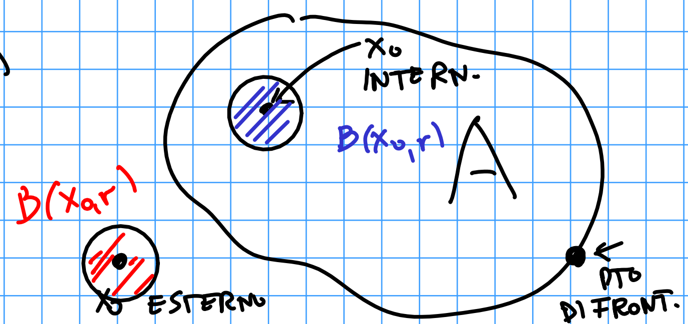
- UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}^N$
- UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}^N$

Def. Se $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ indico

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r \}$$

disco (palla) aperto di centro x_0 e raggio r

Def. • Dico che x_0 e' interno ad A se esiste un numero $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$



• Dico che x_0 è esterno ad A se esiste $r > 0$ tale che

$$B(x_0, r) \cap A = \emptyset \qquad \Big(B(x_0, r) \subset \complement A \leftarrow \text{complementare di } A \Big)$$

• Dico che x_0 è di frontiera per A se x_0 non è né interno né esterno

OSS. • x_0 e' esterno ad $A \iff x_0$ è interno a $\complement A$

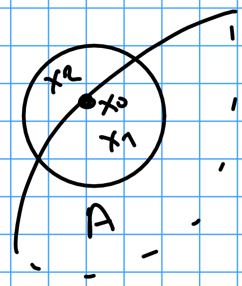
$$\left(\complement A = \text{complementare di } A = \{ x \in \mathbb{R}^N : x \notin A \} \right)$$

Def. Indico con $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni ad A. $\mathring{A}$ si chiama "PARTE INTERNA" di A

Def. Indico con ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A. ∂A si chiama la "FRONTIERA" di A.

$$\text{DUNQUE} \qquad \mathbb{R}^N = \mathring{A} \cup \partial A \cup \mathring{\overbrace{\complement A}}$$

OSS. $x_0 \in \partial A$ se e solo se per ogni $r > 0$ esiste $x_1 \in B(x_0, r) \cap A$ ed esiste $x_2 \in B(x_0, r) \cap \complement A$



Def. $\bar{A} := \mathring{A} \cup \partial A$. $\bar{A}$ si chiama "CHIUSURA DI A"

Def. Dico che A è chiuso se $A = \bar{A}$
Dico che A è aperto se $A = \mathring{A}$

ci sono insiemi che ~~so~~ non sono né aperti né chiusi

OSS. $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ (ovvia)

OSS. $\bar{A} = A \cup \partial A$ (si vede ...)

CI AGGIORNIAMO A DOMANI