Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 64 08/05/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema della divergenza $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. D dominio reg. a tratti $D \subset \Omega$.

Allora

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy\,dz = \Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

dove $\hat{\nu}$ è la normale USCENTE DA D.

(RICORDO CHE ∂D è una sup reg. a tratti orientabile da $\hat{\nu}$ ...)

c'è una versione bidimensionale:

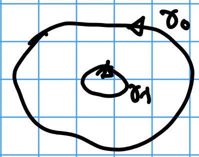
Th. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, $D \subset \Omega$

D dominio reg. a tratti. Allora vale la stessa formula

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy = \underbrace{\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, ds}_{\text{INTEGRALE CURVILINEO}} = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) ds$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_a^b \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) (\gamma_i(t)) \, |\gamma_i'(t)| \, dt$$

dove $\gamma_0 \ldots \gamma_k$ sono delle curve regolari a tratti che descrivono ∂D

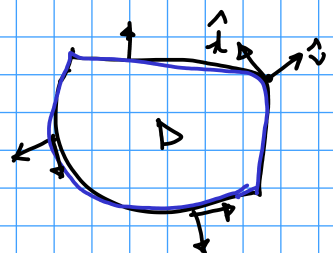


POSSIAMO SCRIVERE UN'ALTRA VERSIONE DEL TEOR. BIDIMENSIONALE

ABBIAMO $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \Omega$, $\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} : \Omega \to \mathbb{R}^2$

Diciamo, per semplicità che ∂D è descritto da una solo curva $\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^2$ $\left(\gamma([0,b]) = \partial D \right)$. γ C^1 a tratti, chiusa

Poniamo $\hat{\nu} : \partial \Omega_{reg} \to \mathbb{R}^2$ la normale unitaria uscente da D



Posso supporre che γ percorra il bordo di D in maniera coerente con $\hat{\nu}$ (γ gira in verso antiorario). QUESTO SIGNIFICA CHE, se $\hat{t}(p)$ è il versore tangente $\hat{t} = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ se $P = \gamma(t)$,

allora $\hat{t}(p) = R\,\hat{\nu}(p)$

dove $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (R\hat{e}_1 = \hat{e}_2,\ R\hat{e}_2 = -\hat{e}_1)$

Prendiamo il campo $\vec{g} = R^* \vec{f} = R^{-1} \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = f_2 \vec{i} - f_1 \vec{j}$

e applichiamo a $\vec{g}$ il teorema della div. bidimensionale:

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{g}\, dx\, dy = \int_{\partial D} (\vec{g} \cdot \hat{\nu})\, ds = \int_{\partial D} (R^* \vec{f} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \right) dx\, dy \qquad \Bigg| \qquad \int_{\partial D} (\vec{f} \cdot R\hat{\nu})\, ds = \int_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{t}\, ds = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

HO TROVATO

<u>Teorema</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ C^1, $D \subset \mathbb{R}^2$ dom. reg. a tratti

∂D descritto da $\gamma_0 \ldots \gamma_k$, che percorrono ∂D in modo coerente con D

(G.G.) $$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec f \cdot d\vec s = \int_{\partial D} \vec f \cdot \hat t \, ds$$

verso coerente con $\hat\nu$

$\hat t$ versore tangente "coerente con D"

$\hat t = R\hat\nu \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

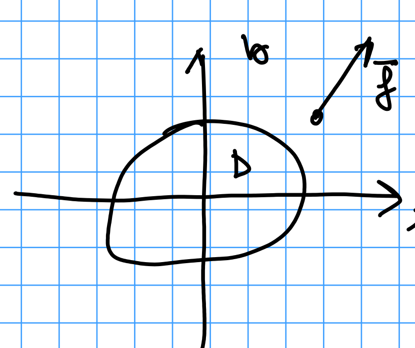
FORMULA DI GAUSS-GREEN

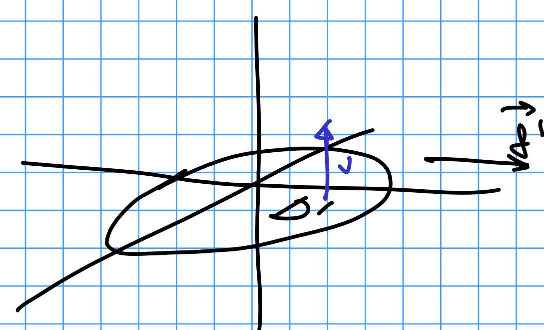
DA GAUSS-GREEN POSSO RICAVARE IL "TEOREMA DI STOKES" che si ottiene "trasferendo" G.G su una sup. in $\mathbb{R}^3$

Immaginiamo GG come fatto su una superficie calcolata nel piano (x,y)

D lo vedo in $\mathbb{R}^3$ mettendo 0 nella componente z

A rigore dovrei prendere $D' = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z=0\}$





Consideriamo $\vec f'(x,y,z) := f_1(x,y)\vec i + f_2(x,y)\vec j + 0\vec k$

La formula di G.G. , si può vedere come

$$\iint_{D'} \text{rot}\,\vec f \cdot \hat\nu \, d\sigma = \int_{\Sigma(D')} \vec f \cdot \hat t \, d\sigma$$

D' vista come superficie in $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot}\,\vec f = \det \begin{bmatrix} i & D_x & f_1 \\ j & D_y & f_2 \\ k & D_z & \cancel{f_3} \end{bmatrix}$$

Nel caso viene $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec k$

QUESTA FORMULA si generalizza a superfici orientabili

(NON DO I DETTAGLI),

TEOREMA DI STOKES $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1.

$(S, \hat{\nu})$ superficie reg. a tratti, orientata con $S \subset \Omega$

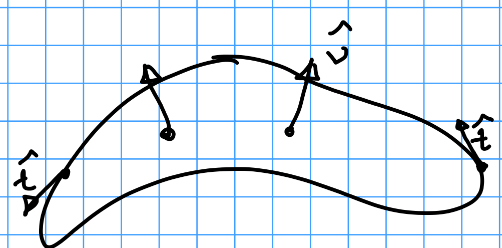
Allora vale la formula

$$\phi(\text{rot}\,\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{\iint_S \text{rot}\,\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)} (\vec{f} \cdot \hat{t})\, d\sigma}$$

dove, se $P \in \Sigma(S)$ (eccetto pti di spigolo) $\hat{t}(P) =$ versore tangente a $\Sigma(S)$ in P, coerente con $\hat{\nu}$

IN altri termini $\int_{\Sigma(S)} (\vec{f} \cdot \hat{t})\, d\sigma = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

dove le γ_i descrivono $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$.



$$\iint_S (\text{rot}\,\vec{f} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)_\nu} \vec{f} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\text{coerente con } \hat{\nu}}$$