Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 63 07/05/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

## AVVISI

(1) Domani mercoledì 8 vengo alle 8.30 con i compitini.
Devo andar via alle 10. (comincio la lezione un po' prima)

(2) HO FISSATO IL IV° compitino per venerdì 31/5 alle 9.30 aula B21 (?)
LE ISCRIZIONI SONO APERTE

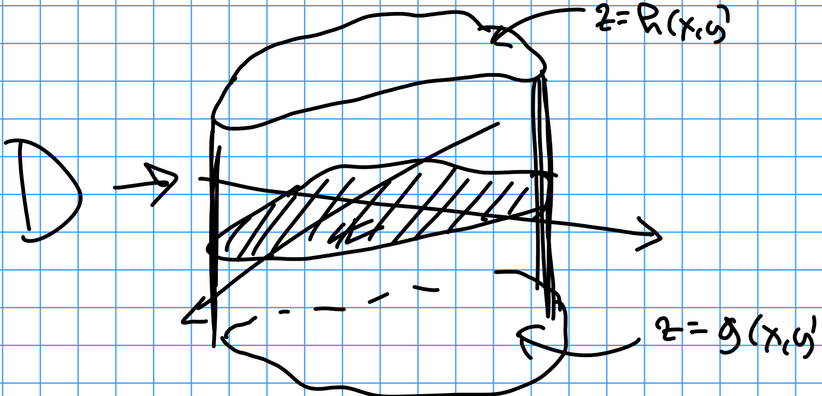
(3) FARÒ 2 lezioni di recupero i giorni LUNEDÌ 27 e MARTEDÌ 28 9.30 – 11.30 aula C21

---

ESEMPIO Supponiamo che $W$ sia un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$, e che $D \subset \mathbb{R}^3$ sia "normale rispetto con base $W$" cioè esistono due funzioni $g, h : W \to \mathbb{R}$

con $g \leq h$ per cui

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in W \quad g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$$




SUPPONGO ANCHE $g, h$ siano $C^1$

(1) DICO CHE $\partial D$ è una sup. regolare a tratti

(2) VEDIAMO COME CALCOLARE $\Phi(\vec{F}, \partial D, \hat{\nu})$

con $\hat{\nu}$ normale uscente da $D$

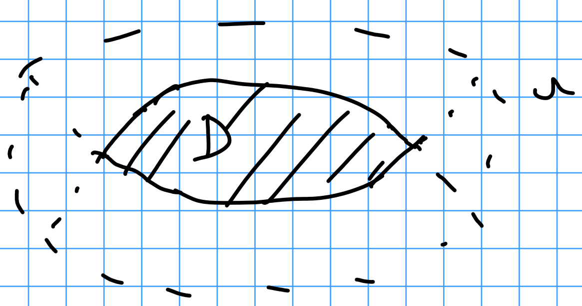
OSS. (sottile...) Da come ho definito $D$ non risulta in modo ovvio che $D$ è un dominio regolare a tratti

RICORDIAMO LA DEF. DI DOM. REG. A TRATTI :

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\quad D$ chiuso $\quad D \subset \Omega$ $\quad$ tale che

$D = \{P \in \Omega : G_1(P) \leq 0 \; ... \; G_K(P) \leq 0\}$ $\quad$ dove

$G_1 .. G_K : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ + ipotesi di trasversalità



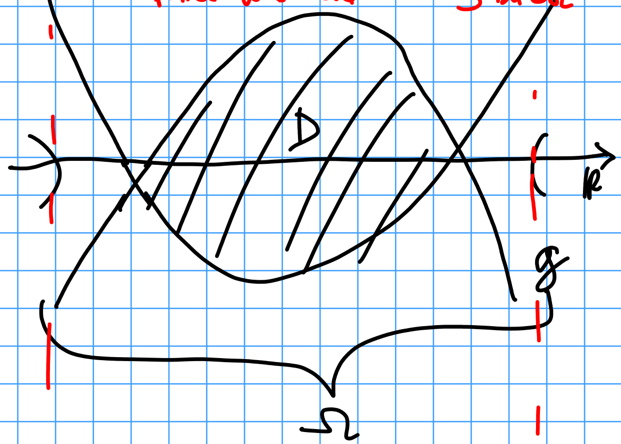

Se avessi definito $D$ in quest'altro modo : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto

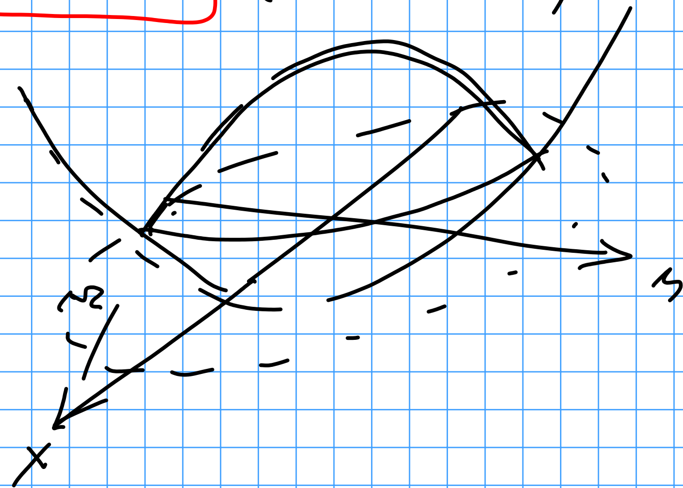
$$D = \{P \in \Omega : g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$$

con $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$

+ $\boxed{\text{IPOTESI} \quad \overline{D} \subset \Omega \times \mathbb{R}}$ $\quad (\Rightarrow D = \overline{D})$

Nota: dico che $h < g$ su $\partial\Omega$




$\Rightarrow$ è ovvio che $D$ è un dominio regolare prendendo

$$G_1(x,y,z) = g(x,y) - z \qquad G_2(x,y,z) = z - h(x,y)$$

---

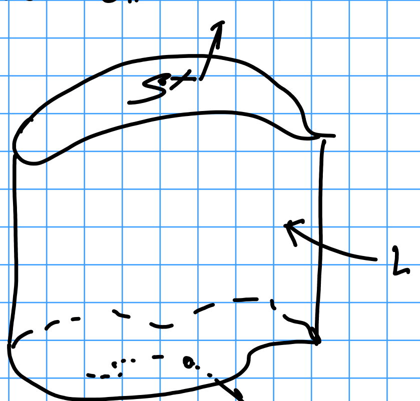
TORNIAMO AL DISCORSO PRINCIPALE

$D$ è quello dell'inizio (con $W$ ..)

$$\partial D = \{(x,y,z) : (x,y) \in W,\ z = g(x,y)\} \cup \{(x,y,z) : (x,y) \in W,\ z = h(x,y)\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \partial W,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\} = S^+ \cup S^- \cup L$$

(CI FIDIAMO DEL DISEGNO)

E' INTUITIVO CHE VALE LA CONDIZIONE DI TRASVERSALITA'




Se $p \in S^+$ ho che

$$z = h(x,y) \iff \underbrace{z - h(x,y)}_{G_2(x,y,z)} = 0$$

$$\nabla G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente x $P = (x,y,z) \in$ $\qquad G_1(P) = 0 \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$

IN SOSTANZA

- $S^1$ è il grafico di $h$, che si parametrizza con $\Gamma(u,v) = (u, v, h(u,v))$ - - ->
$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = -\frac{\partial h}{\partial x}(u,v)\vec{i} - \frac{\partial h}{\partial y}(u,v)\vec{j} + \vec{k}$$

- $S^-$ è "l'opposto" del grafico di $g$ che si parametrizza (per esempio) con $\Gamma(u,v) = (v, u, h(u,v))$ ⟶
$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{j} - \vec{k}$$

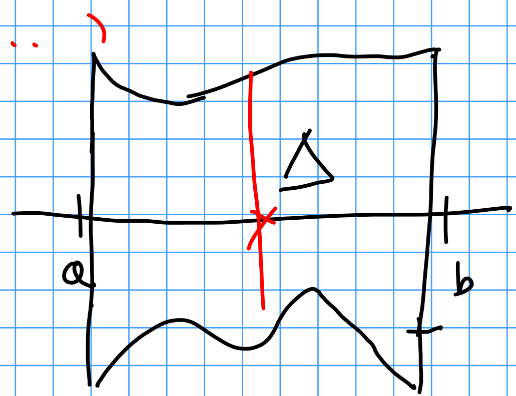
- COME PARAMETRIZZO $L$ ?? DEVO DESCRIVERE $\partial W$ con delle curve $\gamma$ regolari e chiuse dotti (SO CHE LO POSSO FARE)

PER SEMPLICITÀ CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $\partial W$ è descritto da una singola curva $\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^2$, chiusa e regolare

Allora posso definire $\Gamma(t,z) = (\gamma(t), z)$

definito su $\Delta = \{(t,z) : 0 \le t \le b, g(\gamma(t)) \le z \le h(\gamma(t))\}$

(IN REALTÀ DOVREI DIVIDERE $L$ in due pezzi: ...
... )



SE NON DIVIDO IN DUE LA $\Gamma$ NON È INIETTIVA $\Gamma(0,z) = \Gamma(b,z)$

FACCIAMO FINTA DI NIENTE

Se considero questo $\Gamma$ com'è fatto la normale $\vec{N}_\Gamma$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \begin{pmatrix} \gamma_x'(t) \\ \gamma_y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\gamma_x'(t)\vec{i} + \gamma_y'(t)\vec{j}) \otimes \vec{k}$$

$$\gamma_x'(t)\,(\vec{i}\otimes\vec{k}) + \gamma_y'(t)\,(\vec{j}\otimes\vec{k}) = -\gamma_x'(t)\,\vec{j} + \gamma_y'(t)\,\vec{i}$$

$-\gamma_x'\,\vec{j}$ $\qquad\qquad$ $\gamma'$ $\quad \vec{i}$

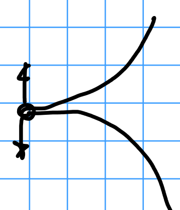
i $\quad$ j $\quad$ k $\quad$ i

k $\quad$ i $\quad$ j

NOTARE CHE, se $P \in L \cap S^+$ $\quad \hat{\nu}_L$ e $\hat{\nu}_{S^+}$ NON possono essere lin dip. a causa della componente su $\vec{k}$

STESSO DISCORSO se $P \in L \cap S^-$

PROBLEMINO (SERVIREBBE UN' IPOTESI) se $P \in S^+ \cap S^-$ potrebbe succedere che le due normali siano sulla stessa retta



Se non metto ipotesi in questo caso non è detto che D sia reg. e dom.

Ammettiamo che questo non si verifichi (dove $g = h$ i grafici non sono tangenti)

IL CASO PIÙ SEMPLICE È $g < h$

Supponiamo ora di avere un campo $\vec{f}$ definito in un $\Omega$ che contiene D. $\vec{f}$ è continuo

Come calcolo $\displaystyle\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$ ($\hat{\nu}$ NORMALE USCENTE)

$$= \iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_{L} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_{S^-} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$$

(ANCHE L - A RIGORE - ANDREBBE DIVISO IN DUE)

• $\displaystyle\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma =$ (USO LA "PARAMETRIZZAZIONE GRAFICO" $\Gamma(u,v) = (u,v,h(u,v))$

$$\iint_W \vec{f}(u,v,h(u,v)) \cdot \underbrace{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}(u,v)\vec{i} - \frac{\partial h}{\partial y}(u,v)\vec{j} + \vec{K}\right)}_{\vec{N}_p} du\, dv$$

ANALOGAMENTE

- $$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = -\iint_W \vec{f}(u,v,g(u,v)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(u,v)\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(u,v)\vec{j} + \vec{K}\right) du\, dv$$

- $$\iint_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_\Delta \vec{f}(\gamma_x(t), \gamma_y(t), z) \cdot \left(-\gamma_x'(t)\vec{j} + \gamma_y'(t)\vec{i}\right) dt\, dz$$

---

__Def.__ Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1$ definisco la DIVERGENZA DI $\vec{f}$ ponendo

$$\operatorname{div}\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

__TEOR. DELLA DIVERGENZA.__

Supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto (limitato)

- $D \subset \Omega$ sia un dominio regolare ($D$ è chiuso)
- $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ sia un campo di classe $C^1$

INDICHIAMO con $\hat{\nu}$ la normale uscente da $D$, che è definita sui punti della frontiera regolare di $D$

$\left(\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}\right.$ dove $i$ è l'UNICO indice per cui $\left.G_i(P) = 0\right)$

COME GIÀ VISTO $(\partial D, \hat{\nu})$ è una sup. reg. a tratti orientata

ALLORA $$\underbrace{\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu})}_{\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma} = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\; dx\,dy\,dz$$

$\left(\text{e } \Sigma^*(\partial D) = \text{frontiera reg. di } D\right)$

DIM IN UN CASO PARTICOLARE SUPPONENDO CHE $D$ sia NORMALE RISPETTO A TUTTI TRE GLI ASSI e ciò che

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in W_1 \quad g_1(x,y) \le z \le h_1(x,y)\} = \quad (a)$$

$$\{(x,y,z) : (x,z) \in W_2 \quad g_2(x,z) \le y \le h_2(x,z)\} = \quad (b)$$

$$\{(x,y,z) : (y,z) \in W_3 \quad g_3(y,z) \le x \le h_3(y,z)\} \quad (c)$$

D convessa dovrebbe andare , VOGLIO $g_i$ e $h_i$ $C^1$

Allora calcolo

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz = \underset{(1)}{\iiint_D \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx\,dy\,dz} + \underset{(2)}{\iiint_D \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dx\,dy\,dz} + \underset{(3)}{\iiint_D \frac{\partial f_3}{\partial z}\, dx\,dy\,dz}$$

Vediamo come stimo l'integrale (3). Qui uso la rappresentazione (a)

$$(3) = \iint_{W_1} \left( \int_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy =$$

$$\iint_{W_1} \Big[ f_3(x,y,z) \Big]_{z=g_1(x,y)}^{z=h_1(x,y)} dx\,dy = \iint_{W_1} f_3(x,y,h_1(x,y))\, dx\,dy - \iint_{W_1} f_3(x,y,g(x,y))\, dx\,dy$$

ANALOGAMENTE

$$(1) \overset{(\text{uso } (c))}{=} \iint_{W_3} f_1(h_3(y,z),y,z)\, dy\,dz - \iint_{W_3} f_1(g_3(y,z),y,z)\, dy\,dz$$

$$(2) \overset{(\text{uso } (b))}{=} \iint_{W_2} f_2(x,h_2(x,z),z)\, dx\,dz - \iint_{W_2} f_2(x,g_2(x,z),y)\, dx\,dz$$

$$(1)+(2)+(3) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz$$

FACCIAMO IL FLUSSO DI $\vec{f}$ su $\partial D$ , Posso vedere

$$\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$$

$$\iint_{\partial D} f_1 \vec{i} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$ = uso la formula vista all'inizio usando la (c)

CON QUESTA SCELTA $f_1 \vec{i}$ è perpendicolare alla sup laterale L

$\Rightarrow \iint_L f_1 \vec{i} = 0$ . RIMANGONO

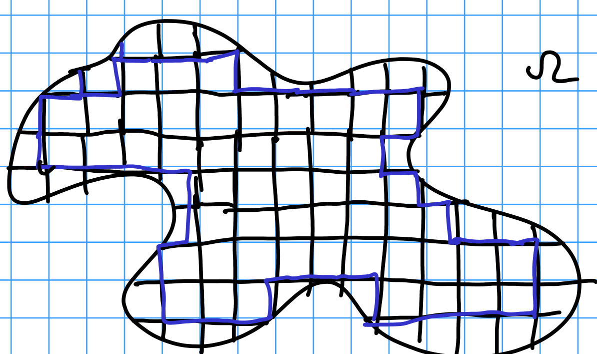
$$\iint_{S^+} f_1 \vec{i} \, d\sigma = \iint_{W_3} f_1 (h_3(y,z), y, z) \, dy \, dz$$

$$\rightarrow \iint_{S^-} f_1 \vec{i} \, d\sigma = -\iint_{W_3} f_1 (g_3(y,z), y, z) \, dy \, dz$$

$\Rightarrow$ RITROVO I TERMINI CHE USCIVANO DA (1)

ANALOGAMENTE RAGIONO PER GLI ALTRI PEZZI E TUTTO TORNA

SE VOLESSI IL TEOREMA GENERALE POTREI FARE UNA DECOMPOSIZIONE " IN CUBETTI " e poi mando il lato del cubetto a zero



$\Omega$