Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 62 06/05/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Def. • $S \subset \mathbb{R}^3$, dico che S è una sup. reg. a tratti se esistono $S_1 \dots S_k$ tali che ogni S_i $i = 1 \dots k$ è una sup parametrica e

(a) $S = S_1 \cup \dots \cup S_k = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$

(b) $S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$ $i \neq j$

(c) $S_i \cap S_j \cap S_h$ è un insieme finito se i, j, h distinti

• In questa situazione dico che $S_1 \dots S_k$ è una decomposizione di S.

• Chiamo "bordo" di S l'insieme

l'altra volta ho scordato la chiusura

$$\Sigma(S) = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} \{ P \in \Sigma(S_i) \,,\ P \notin \Sigma(S_j) \text{ se } j \neq i \}}$$

Si dimostra che $\Sigma(S)$ non cambia se cambio decomposizione

• Se $P \in S$ dico che P è un "punto regolare di S" se esiste una decomposizione $S_1 \dots S_k$ di S ed esiste i da 1 a k per cui $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$

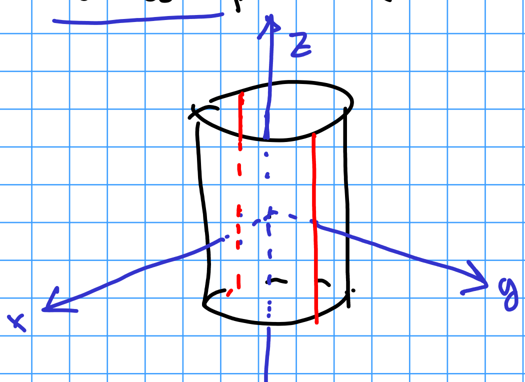
Naturalmente se $P \in \Sigma(S) \Rightarrow P$ NON È REGOLARE

Chiamo parte singolare di S l'insieme dei punti P che non sono regolari (parte reg. l'insieme dei pti regolari)

Indico $\Sigma^*(S)$ = parte singolare. È chiaro che $\Sigma(S) \subset \Sigma^*(S)$

• FUORI DA $\Sigma^*(S)$ sono definiti il piano tangente e la retta normale → continuo dopo l'esempio

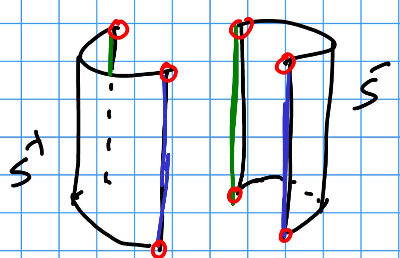
Per esempio il cilindro $C = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1, -1 \le z \le 1\}$



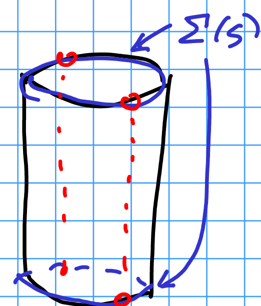
lo posso vedere come unione di S^+, S^-

dove $S^+ = \{(x,y,z) \in C : x \geq 0\}$

$S^- = \{(x,y,z) \in C : x \leq 0\}$



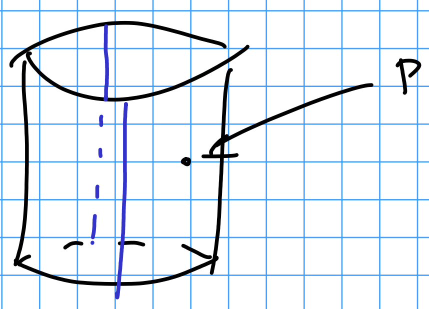
$\Sigma(C) = \{x^2+y^2=1, z=1\} \cup \{x^2+y^2=1, z=-1\}$



quando faccio la chiusura recupero i quattro punti rossi

Chi è $\Sigma^*(C)$?? Coincide con $\Sigma(S)$ perché per ogni P che non sta in $\Sigma(C)$ trovo una decomposizione di C in due sup. par. S_1 e S_2 (tagliando verticalmente il cilindro) con la proprietà che $P \notin \Sigma(S_1)$, $P \notin \Sigma(S_2)$

(perché posso tagliare verticalmente C "scansando P")



→ INFATTI SE $P \notin \Sigma^*(S)$ deve esistere una suddivisione $S_1 \dots S_k$ e un indice i tra 1 e K per cui $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$.

Allora S_i ammette piano tangente e retta normale in P

DEFINISCO

$$T_p(S) := T_p(S_i) \qquad N_p(S) := N_p(S_i)$$

Si dimostra che $T_p(S)$ e $N_p(S)$ NON DIPENDE DALLA SUDDIVISIONE

- se $\Sigma^*(S) = \Sigma(S)$ dico che S è una sup. regolare.

In questo caso $T_p(S)$ e $N_p(S)$ esistono $\forall p \notin \Sigma(S)$

ESEMPIO $S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\} \Rightarrow$

S è una sup. regolare e $\Sigma^*(S) = \Sigma(S) = \emptyset$

$\leftarrow \Sigma(S) = \emptyset$ e $\Sigma^*(S) \subset$ equatore

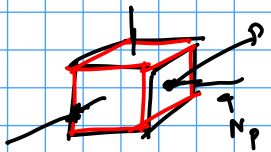
Ma posso cambiare decomposizione

$\Rightarrow \Sigma^*(S) \subset$ tropico

$\rightsquigarrow \Sigma^*(S) = \emptyset$

APPL: esempi di superfici reg. a tratti

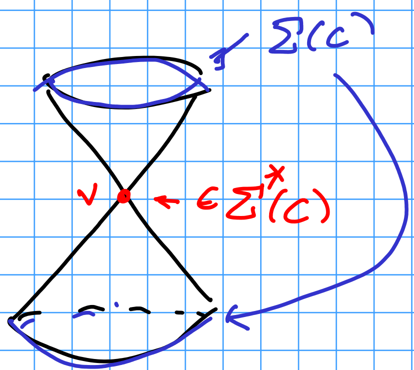
- Sup del cubo: $S = \partial Q$ $\qquad Q = \{|x| \le L,\ |y| \le L,\ |z| \le L\}$



Si dimostra che $\Sigma'(\partial Q) = \emptyset$

Ma $\Sigma'^{*}(\partial Q) = \{$ dodici "spigoli" $\}$

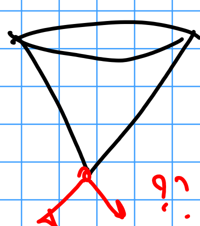
- Cono $\qquad C = \{x^2+y^2 = z^2,\ z_1 \le z \le z_2\}$



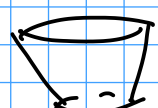
IL VERTICE V NON È UN PTO REGOLARE

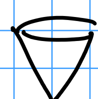
perché le S_i che decompongono C dovrebbero avere delle parametrizzazioni $\Gamma_i : W_i \to \mathbb{R}$ con $\Gamma_i \in C^1(\mathring{W}_i)$

Si può dim. che $V \notin \Gamma_i(\mathring{W}_i)$ per motivi di regolarità



A seconda di come scelgo z_1 e z_2 ho vari casi



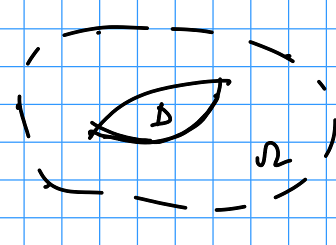


TEOREMA $\quad D \subset \mathbb{R}^3$ sia un dominio regolare LIMITATO

Ricordiamo che $\quad D = \{G_1 \le 0 \ \dots\ G_k \le 0\}$ dove

$G_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega$ è un aperto $\quad \overline{D} \subset \Omega$ $\quad (\Rightarrow D$ è chiuso$)$

+ ipotesi di trasversalità



ALLORA SI HA CHE

$S = \partial D$ // $\{P \in \Omega : \exists i \text{ per cui } G_i = 0\}$ è una superficie regolare a tratti con

$\Sigma(S) = \phi$ mentre

$\Sigma^*(S) = \{P \in S \text{ t.c. } \exists\, i,j \;\; i \neq j \;\; G_i(P) = G_j(P) = 0\}$

Inoltre se $P \notin \Sigma^*(S)$ e cioè se esiste un UNICO INDICE i per cui $G_i(P) = 0$ allora la retta normale a S in P è data da

$$N_p(S) = \{\lambda \nabla G_i(P) : \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad N_p(S)^{\perp}$$

$$T_P(S) = \{\text{direzioni tangenti a } S_i \text{ in } P\} \quad \text{dove } S_i = \{G_i = 0\}$$

NO DIM.

Se D è regolare $\Rightarrow S = \partial D$ è regolare $\Sigma^*(S) = \phi$

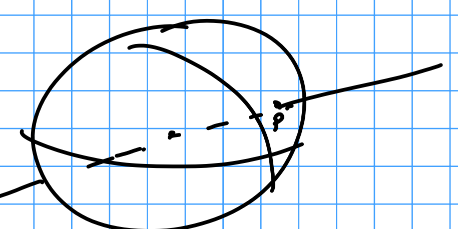
ESEMPI

$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è la frontiera della palla

$B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

IN QUESTO CASO S è regolare perchè c'è un'unica G_i e se $P \in S \Rightarrow$

$$N_P(S) = \{\lambda\, \overrightarrow{P - O} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



INFATTI se $P = (x, y, z)$, S da

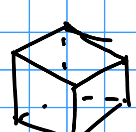
$G = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $\nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\left(\overrightarrow{P - O}\right) \Rightarrow$ TESI

- D = CUBO $\Rightarrow$ $D = \{-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$

Ci sono sei G_i: $G_1 = -1 - x$, $G_2 = x - 1$

$G_3 = -1 - y$, $G_4 = y - 1$ $\Rightarrow$ 6 FACCE

$G_5 = -1 - z$, $G_6 = 1 - z$

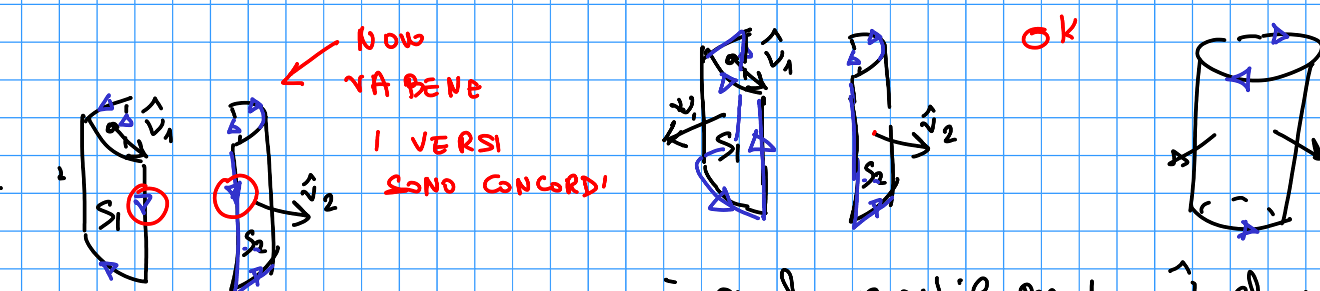


DEF. (SUPERFICIE ORIENTABILE/ORIENTATA)

$S \subset \mathbb{R}^3$ sia una superficie regolare a tratti. So che esiste una decomposizione $S_1 \dots S_k$ di S.

So anche che su ogni S_i si può scegliere un'orientazione $\hat{\nu}_i$ ($\hat{\nu}_i(p) \in N_p(S_i)$ e $\hat{\nu}$ è continuo su S_i, $\|\hat{\nu}_i\|=1$ $\forall p \in S_i \setminus \Sigma'(S_i)$)

Se ho un tale $\hat{\nu}_i$ ho anche un verso su $\Sigma'(S_i)$ rispetto a $\hat{\nu}_i$



è anche possibile prendere $\hat{\nu}$ che va verso dentro

Dico che S è orientabile se è possibile scegliere le $\hat{\nu}_i$ in modo che nei punti $P \in \Sigma'(S_i) \cap \Sigma'(S_j)$ $i \neq j$ "i versi sono opposti". IN QUESTO CASO HO TROVATO UN CAMPO DI VETTORI $\hat{\nu}$ definiti su $S \setminus \Sigma^*(S)$ che hanno le prop.

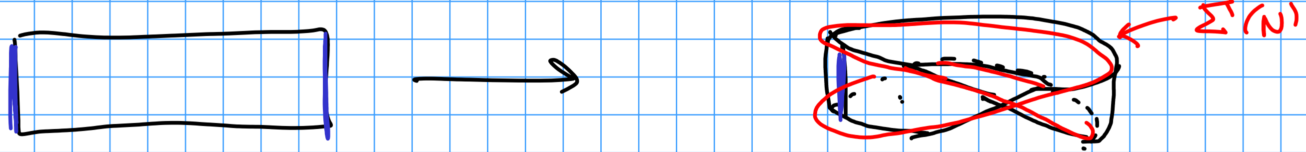
$$\|\hat{\nu}(p)\| = 1, \quad \hat{\nu}(p) \in N_p(S)$$

QUESTO CAMPO $\hat{\nu}$ (definito solo su $S \setminus \Sigma^*(S)$) si chiama orientazione di S e la coppia $(S, \hat{\nu})$ si chiama "superficie orientata"

INOLTRE DATA UN'ORIENTAZIONE $\hat{\nu}$ su S è definito il verso del bordo $\Sigma'(S)$ coerente con $\hat{\nu}$

QUESTO VERSO È IL VERSO DEI BORDI $\Sigma'(S_i)$ (S_i la decomposizione) rispetto a $\hat{\nu}_i$

NON TUTTE LE SUPERFICI SONO ORIENTABILI :



NASTRO DI MOEBIUS (HA UNA SOLA FACCIA e il bordo è fatto da UNA SOLA CURVA)

PERÒ LE SUPERFICI OTTENUTE NEL TEOREMA DI PRIMA :

$$S = \partial D \qquad D \text{ dominio reg. e dati } \{G_1 \le 0 \dots G_k \le 0\}$$

SONO ORIENTABILI SEMPRE e si può scegliere "in modo canonico" la normale uscente da D (in ogni punto di $S \setminus \Sigma^*(S)$)

Semplicemente se $P \in S \setminus \Sigma^*(S)$ so che esiste uno unico G_i per cui $G_i(P) = 0$. Pongo

$$\hat{\nu}(P) := \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$$

Si dimostra che questa scelta di $\hat{\nu}$ fornisce un'orientazione per $S = \partial D$

OSS. Le nozioni di "Frontiera regolare di D" e "Parte regolare di ∂D" coincidono. (NO DIM.)

ESEMPIO $\quad D = \{x^2+y^2+z^2 \le 4, \quad x^2+y^2 \ge 1\}$

Vediamo che D è un dominio regolare. In effetti ho $D = \{G_1 \le 0, G_2 \le 0\}$ dove

$G_1 = x^2+y^2+z^2-4$ $\qquad \nabla G_1 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2zk$

$G_2 = 1-x^2-y^2$ $\qquad \nabla G_2 = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ (TRASVERS.)

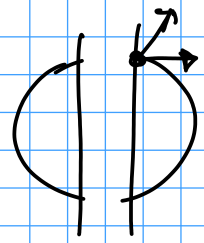
$\nabla G_1(P) \neq 0 \ \forall \ G_1(P)=0$

$\nabla G_2(P) \neq 0 \ \forall \ G_2(P)=0$

$P=(x,y,z)$

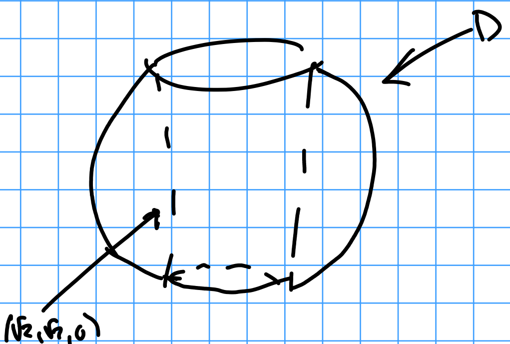
INOLTRE se $G_1(P)=G_2(P)=0$

$\Rightarrow z^2=3 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{3}$ $\boxed{\neq 0}$



NON PUÒ ESSERE CHE

$2x\vec{i} + 2y\vec{j} \pm 2\sqrt{3}\,\vec{k} = \lambda(-2xi-2y\vec{j})$



$\partial D = C \cup S$ dove

$C=\{x^2+y^2=1, -\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}\}$ $\qquad S=\{x^2+y^2+z^2=4, -\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}\}$

perché $\partial D = \{G_1=0, G_2\le 0\} \cup \{G_1\le 0, G_2=0\}$

La "frontiera regolare" è $\{G_1=0, G_2<0\} \cup \{G_1<0, G_2=0\}$

$C \setminus \Sigma(C) = \{x^2+y^2=1, -\sqrt{3}<z<\sqrt{3}\}$

$S \setminus \Sigma(S) = \{x^2+y^2+z^2=4, -\sqrt{3}<z<\sqrt{2}\}$

$\Sigma^*(\partial D) = \{x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=1\}$ (DUE CIRCONF.)

$\Sigma(\partial D) = \emptyset$!!

Se per esempio $P=(\sqrt{2},\sqrt{2},0) \Rightarrow P\in S\setminus\Sigma(S)$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{\nu}(P)}_{\text{NORM. USCENTE DA D}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\qquad$ perché $P\in S, P\notin C$

se $G_1(P)=0$ $\quad (G_2(P)<0)$

$\nabla G_2(P) = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j} + 0\vec{k}$

se normalizzo $\Rightarrow \hat{\nu} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

<u>Def</u> Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ è una sup. regolare a tratti.

(1) Data $f: S \to \mathbb{R}$ continua definisco:

$$\iint_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} f \, d\sigma$$

dove S_i è una suddivisione. (se $f \geq 0$ può valere $+\infty$, se f non è POSITIVO devo chiedere che tutti gli integrali $\iint_{S_i} f \, d\sigma$ siano finiti.)

$$\text{Area}(S) := \iint_S 1 \, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \text{Area}(S_i)$$

(2) Si $\vec{f}: S \to \mathbb{R}^3$ continua con $\iint_S |\vec{f}| < +\infty$

e se c'è <u>un'orientazione $\hat{\nu}$ su S</u> allora

definisco il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$ ponendo

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \sum_{i=1}^{k} \Phi(\vec{f}, S_i, \hat{\nu})$$

QUESTE NOZIONI <u>NON</u> DIPENDONO DALLA SUDDIVISIONE!