Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 61 30/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

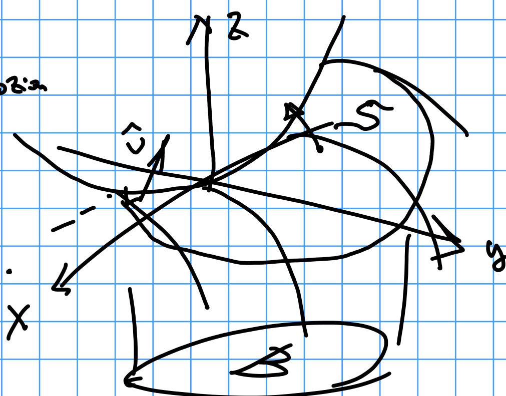
ESEMPIO $S = \{ x^2+y^2 \le 1 \,,\ z = x^2 - y^2 \}$

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(1) S è una sup parametrica. In effetti S è il grafico di $g(x,y) = x^2 - y^2$ sul dominio $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$ (è una "sella")

Supponiamo che, con la parametrizzazione "grafico" $\boxed{\Gamma(u,v) = (u,v,g(u,v))}$ trovo

$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u} \\ -\frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$



Se considero $\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ ho che $\hat{\nu}$ è un campo di vettori normali su S. Infatti:

$$\text{(A)}\quad \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} = \hat{\nu}(\Gamma(u,v)) = \frac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|} =$$ stessa cosa di sinistra

OVVIAMENTE, dato che $B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$ è connesso $\Rightarrow$ ci sono <u>due</u> possibili campi normali cioè $\hat{\nu}$ e $-\hat{\nu}$

- $\hat{\nu}$ è concorde con l'asse z, cioè con $\vec{k}$.

- Cerchiamo il flusso di f attraverso $(S, \hat{\nu})$ cioè

$$\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint_S \frac{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})(-2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k})}{(1+4(x^2+y^2))^{1/2}} \, d\sigma =$$

Posso usare la parametrizzazione Γ perché $\vec{N}_p$ è concorde con $\hat{\nu}$ (per come ho definito $\hat{\nu}$ — VEDI $\star$)

$$= \iint_B (u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2-v^2)\vec{k}) \cdot (-2u\,\vec{i} + 2v\,\vec{j} + \vec{k}) \, du\,dv =$$

$$\left(\phi(f, S, \hat{\nu}) = \underbrace{\iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_p(u,v) \, du\,dv} = \iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \hat{\nu}(\Gamma(u,v)) \|\vec{N}_p\| \, du\,dv \right)$$

Detto ieri

$$\iint_B (-2u^2+2v^2+u^2-v^2)\,du\,dv = \iint_B (-u^2+v^2)\,du\,dv = \text{(polari)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)\,\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} -\cos(2\theta)\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho$$

$$\underbrace{\left[-\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} \underbrace{\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1}_{=\frac{1}{4}} = 0$$

Si vedeva subito che viene zero a causa della simmetria:

$$\vec{f}(-x,-y,-z) = -\vec{f}(x,y,z) \quad \text{e} \quad (x,y,z) \in S \Leftrightarrow -(x,y,z) \in S$$

Se al posto di S considero $S^{++} = \{x^2+y^2 \leq 1,\ z = x^2-y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

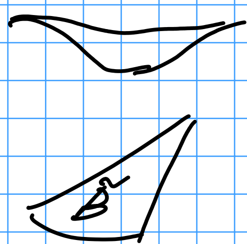
... STESSI CALCOLI con $B^{++} = \{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ al posto di B ...

$$\longrightarrow \int_0^{\pi/2} -\cos(2\theta)\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = = \left[-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \ldots$$ FA ANCORA ZERO...

RIMPICCIOLISCO ANCORA S e prendo $\tilde{S} = \{x^2+y^2 \le 1, z = x^2-y^2, 0 \le x \le y\}$

$(\tilde{B} = \{x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\})$

Così

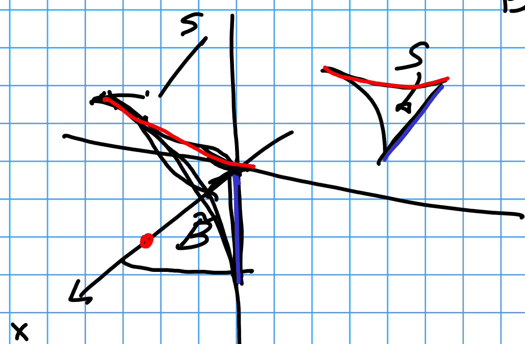


se passo in coordinate polari

$$-\int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = -\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

- Prendiamo (di nuovo) $\tilde{S} = \{(x,y) \in \tilde{B} \quad z = x^2-y^2\}$

$\tilde{B} = \{x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le y \le x\}$



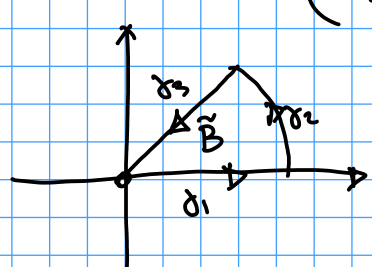
CERCHIAMO DI DESCRIVERE $\Sigma(\tilde{S})$ in dirette dello avere "coerente"

con $\hat{\nu} = \dfrac{-2x\vec{i}\ 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

SE SEGUO LE DEFINIZIONI DEVO

(1) Descrivere $\partial\tilde{B}$ in modo coerente a $\tilde{B}$

$\partial\tilde{B} = \gamma([a,b])$ dove $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$



γ_1 = segmento da $(0,0)$ e $(1,0)$

γ_2 = circonferenza da $(1,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$

γ_3 = segmento da $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(0,0)$

che si possono scrivere esplicitamente

$\gamma_1(t) = t(1,0) \quad 0 \le t \le 1 \qquad \gamma_2(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$\gamma_3(t) = (1-t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\gamma_3(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ \gamma_3(1) = (0,0)\right) \quad 0 \le t \le 1$

Se prendo $\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ posso "Trasferire" γ su S

trovo $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \vee \tilde{\gamma}_2 \vee \tilde{\gamma}_3$ dove

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \Gamma(\underbrace{\gamma_1(t)}_{(t,0)}) = (t, 0, t^2) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \Gamma(\gamma_2(t)) = (\cos(t), \sin(t), \underbrace{\cos^2(t) - \sin^2(t)}_{\cos(2t)}) \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \Gamma(\gamma_3(t)) = \left((1-t)\frac{\sqrt{2}}{2}, (1-t)\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

La $\tilde{\gamma}$ descrive $\partial(\tilde{S})$ coerentemente con $\hat{v}$ PERCHÉ

Γ è coerente con $\hat{v}$

· VARIAZIONE Calcoliamo il flusso $\Phi(\vec{f}, \tilde{S}, \hat{v})$ (lo stesso)

usando un'altra parametrizzazione

$$\Gamma(\theta, \rho) := (\overbrace{\rho\cos\theta}^{x}, \overbrace{\rho\sin\theta}^{y}, \overbrace{\rho^2\cos(2\theta)}^{x^2-y^2}) \qquad \overbrace{0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \quad 0 \le \rho \le 1}^{\tilde{D}}$$

(si vede facilmente che $\Gamma(\tilde{D}) = \tilde{S}$)

mi deve $\vec{N}_\Gamma(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ -2\rho^2\sin 2\theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2\rho\cos 2\theta \end{pmatrix} =$

$$\rho \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sin\theta & \cos\theta \\ \vec{j} & \cos\theta & \sin\theta \\ \vec{k} & -2\rho\sin 2\theta & 2\rho\cos 2\theta \end{bmatrix} = \rho \begin{pmatrix} (2\rho\cos\theta\cos 2\theta + 2\rho\sin\theta\sin 2\theta)\vec{i} \\ (+2\rho\sin\theta\cos 2\theta - 2\rho\cos\theta\sin 2\theta)\vec{j} \\ -1\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$= \rho\left(2\rho\cos(\theta)\vec{i} - 2\rho\sin(\theta)\vec{j} - \vec{k}\right) = \vec{N}_\Gamma(\theta, \rho)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

• VEDIAMO se è concorde o discorde con $\hat{\nu}$ (se è giusto deve essere discorde come si vede dalla terza componente

$$\hat{\nu}\left(\Gamma(\theta,\rho)\right) = \frac{\left(-2\rho\cos\theta\,\vec{i} + 2\rho\sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}\right)}{(1+4\rho^2)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{(1+4\rho^2)^{1/2}}\left(-\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 1\right) \quad \text{OPPOSTI !!!}$$

$$\frac{\vec{N}_r(\theta,\rho)}{\|\vec{N}_r(\theta,\rho)\|} = \frac{\cancel{\rho}\left(2\rho\cos(\theta)\,\vec{i} - 2\rho\sin(\theta)\,\vec{j} - \vec{k}\right)}{\|\cancel{\rho}\left(2\rho\cos(\theta)\,\vec{i} - 2\rho\sin(\theta)\,\vec{j} - \vec{k}\right)\|} = \frac{2\rho\cos\theta\,\vec{i} - 2\rho\sin\theta\,\vec{j} - \vec{k}}{(1+4\rho^2)^{1/2}}$$

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \qquad \Gamma(\theta,\rho) = \left(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \rho^2\cos 2\theta\right)$$

$$\hat{\nu}\left(\Gamma(\theta,\rho)\right) = \hat{\nu}\left(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \rho^2\cos 2\theta\right) =$$

$$\begin{pmatrix} -2\rho\cos\theta \\ 2\rho\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{(1+4\rho^2)}$$

$\Gamma(\theta,\rho)$ è discorde con $\hat{\nu}$. FACCIO IL FLUSSO CON QUESTA Γ :

$$\iint_D \vec{f}\left(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \rho^2\cos 2\theta\right)\cdot\rho\left(2\rho\cos\theta,\ -2\rho\sin\theta,\ -1\right)d\theta\, d\rho$$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \left(2\rho^2\cos^2\theta - 2\rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos 2\theta\right) =$$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \left(\rho^2\cos(2\theta)\right) = \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{1}{8}$$

$\uparrow$ quello di prima cambiato di segno

TORNA TUTTO

DOBBIAMO ORA DEFINIRE LE SUPERFICI "GENERALI" "NON PARAMETRICHE".

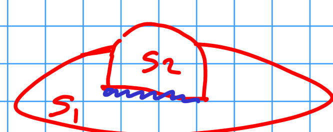
IDEA: INCOLLARE TRA LORO SUPERFICI PARAMETRICHE

Def. $S \subset \mathbb{R}^3$ dico che S è una SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI (NO PARAMETRICA) SE ESISTONO $S_1 \dots S_k$ SUPERFICI PARAMETRICHE tali che

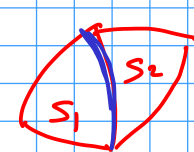
(a) $$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$$

(b) $$S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j) \quad \text{se } i \neq j \text{ tra } 1 \text{ e } k$$

(le S_i si incollano SOLO SUI BORDI)

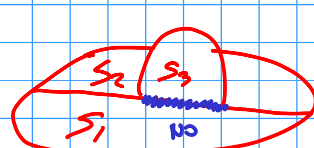


NO

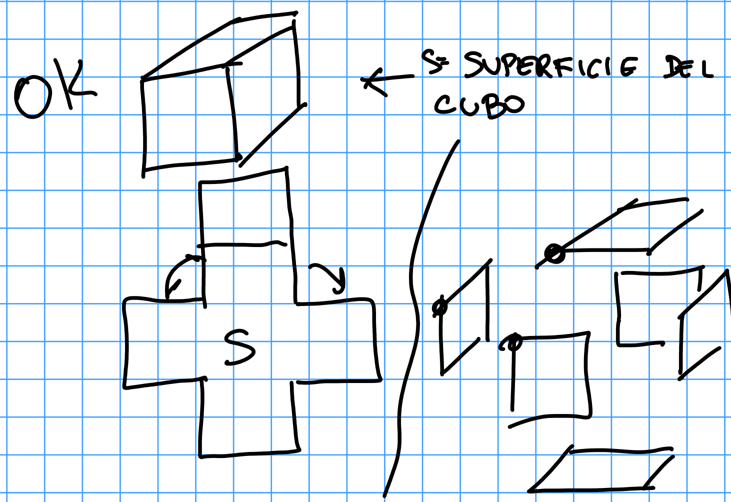


SI

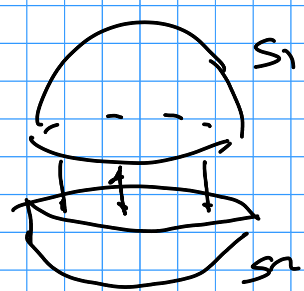
(c) Se $i \neq j \neq h$ sono tra 1 e k allora $S_i \cap S_j \cap S_k$ CONTIENE UN NUMERO FINITO DI PUNTI



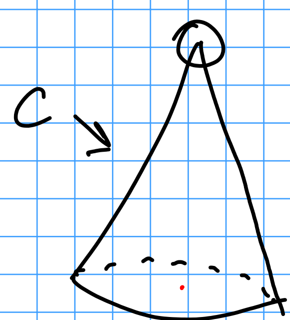
Se $S_1 \ldots S_k$ sono come sopra dico che $S_1 \ldots S_k$ è una DECOMPOSIZIONE DI S



SFERA

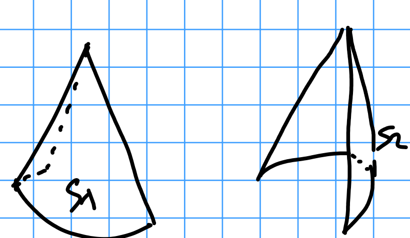


CONO



PER COME HO FATTO LE DEF. C NON È UNA SUP. PAR. A CAUSA DEL VERTICE CHE FA SÌ CHE UNA SINGOLA Γ CON $\Gamma(\Omega) = C$ NON PUÒ ESSERE $C^1(\Omega)$

C LO RECUPERO INCOLLANDO DUE PEZZI



(LO SPIGOLO È SU $\Sigma(S_1)$ e $\Sigma(S_2)$)

Se S è compatto posso definire $\Sigma(S)$ = BORDO di S.

ponendo

$\Sigma(S)$ = "UNIONE DEI $\Sigma(S_i)$ CHE NON VENGONO INCOLLATI"

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \{ p \in \Sigma(S_i) ,\ p \notin \Sigma(S_j) \text{ per } j \neq i \}$$

SI DIMOSTRA CHE $\Sigma(S)$ NON CAMBIA SE CAMBIO LA SUDDIVISIONE

ESEMPI

S = sfera $\Rightarrow$ $\Sigma(S) = \emptyset$

S = sup. del CUBO $\Rightarrow$ $\Sigma(S) = \emptyset$

S = cono