Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 60 29/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

S superficie parametrica

$f: S \to \mathbb{R}$ continua si definisce l'integrale di superficie (DI I^a SPECIE) ponendo

$$(*) \quad \iint_S f \, d\sigma := \iint_W \underbrace{f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv}_{\text{CONTINUA IN } \mathring{W}}$$

dove $\Gamma: W \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione.

La def. è ben posta perché se $\Gamma_1: W_1 \to \mathbb{R}^3$ è un'altra parametrizzazione

$$\iint_W f(\Gamma(u,v)) \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv = \iint_{W_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\| \, du_1 \, dv_1$$

IN REALTÀ se $f \geq 0$ la $(*)$ definisce l'integrale eventualmente infinito. Se f non è positiva bisogna supporre che

$$\iint_S f^+ \, d\sigma < +\infty \quad \text{e} \quad \iint_S f^- \, d\sigma < +\infty$$

(NOTA CHE l'integrando di destra, nella $(*)$, è continuo in $\mathring{W}$, $\Rightarrow$ misurabile)

Se $g \equiv 1$, cioè se integro $\|\vec{N}_\Gamma\|$ trovo L'AREA DI S (è una definizione)

$$\text{Area}(S) := \iint_S d\sigma = \iint_W \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv \quad (\in [0,+\infty[)$$

Se so che Γ è $C_1(W)$ (non solo su $\mathring{W}$) $\Rightarrow$ questi integrali sono tutti finiti

<u>OSS.</u> Ricordiamo che date due parametrizzazioni $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ esiste un cambio di parametro $\phi : W_1 \to W$ che è $C^1(\mathring{W}_1)$ e continuo su W tale che

$$\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi \quad \text{cioè} \quad \Gamma_1(u_1,v_1) = \Gamma(\phi(u_1,v_1))$$

IN QUESTO CASO

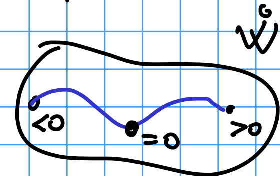
$$(**) \qquad \vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1) = \det J_\phi \, \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1))$$

SI PUÒ ANCHE VEDERE CHE, se W è connesso ($\Leftrightarrow$ W_1 è connesso) allora

$\det J_\phi$ ha sempre lo stesso segno in W_1, cioè

$$\longrightarrow \quad \det J_\phi(u_1,v_1) \begin{cases} > 0 & \forall (u_1,v_1) \text{ in } W_1 \\ < 0 & \forall (u_1,v_1) \text{ in } W_1 \end{cases}$$

(segue dal fatto che $\det J_\phi \neq 0$)



NE SEGUE CHE

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1) \text{ è } \begin{cases} \text{sempre concorde con } \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1)) \\ \text{sempre discorde con } \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1)) \end{cases}$$

DUNQUE POSSO DIVIDERE LE PARAMETRIZZAZIONI DI DI S IN UN DUE CLASSI $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tali che

se $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{P}_1$ allora sono "concordi" ($\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \phi$ $\det \phi > 0$)
se $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{P}_2$ " " "
se $\Gamma_1 \in \mathcal{P}_1$ e $\Gamma_2 \in \mathcal{P}_2$ sono discordi $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \phi$ $\det \phi < 0$

(dovrei introdurre una rel. di equivalenza $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ se $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \phi$ con $\det \phi > 0$, e definire $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ le "classi di equivalenza")

POSSIAMO NOTARE che l'integrale definito prima NON CAMBIA se descrivo S con parametrizzazioni discordi

---

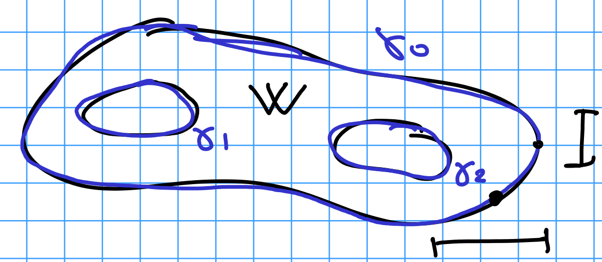
ORIENTAMENTO DEL BORDO DI S

FATTO. Se $W \subset \mathbb{R}^2$ è un Dominio regolare $\Rightarrow$ (1) si può "descrivere" ∂W mediante un numero finito di curve:

LIMITATO

Più precisamente $\exists\ \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, curve chiuse regolari e belle (C^1 e tutti e $\gamma_i' \neq 0$) tali che $(k \geq 0)$

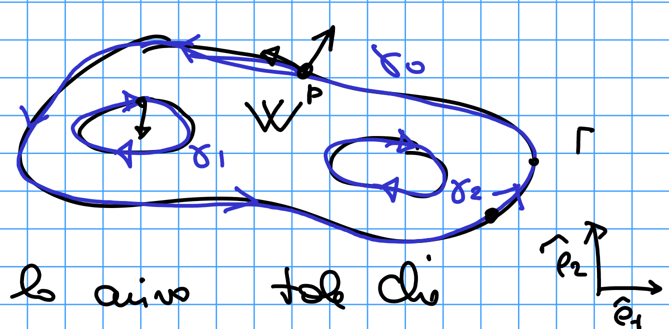
$$\partial W = \bigcup_{i=0}^{k} \gamma_i([a,b])$$



(NON LO DIMOSTRIAMO – È UNA CONSEGUENZA DEL DINI.
Se W fosse regolare $W = \{G \leq 0\}$ dove $|\nabla G| \neq 0$ in ∂W
$\partial W = \{G = 0\}$)

(2) Queste curve si possono prendere "con verso coerente" con W. QUESTO VUOL DIRE – in modo un po' qualitativo –

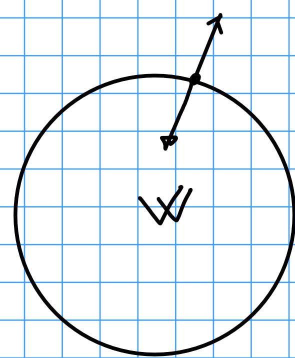
se percorro la curva γ_i "tengo W a sinistra"



Se voglio essere rigoroso dovrei dire che: se $P \in \partial W$, se γ_i è la curva tale che

$\gamma_i(t) = P$ per un opportuno $t \in [a,b]$ ALLORA

in P ho $\gamma'(t)$ e $\vec{n}(P) = \nabla G_j(P)$ ← NORMALE USCENTE DA W . che sono tra loro ortogonali VOGLIO CHE la rotazione R che trasforma $\vec{n}$ in $\gamma'(t)$ trasformi $\hat{e}_1$ in $\hat{e}_2$.



DUNQUE se $W \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare

__POSSO__ descrivere ∂W con un numero finito di curve chiuse e posso scegliere su queste curve UN VERSO STANDARD (ANTIORARIO)

VOGLIO "TRASFERIRE" IL VERSO SU $\Sigma(S)$

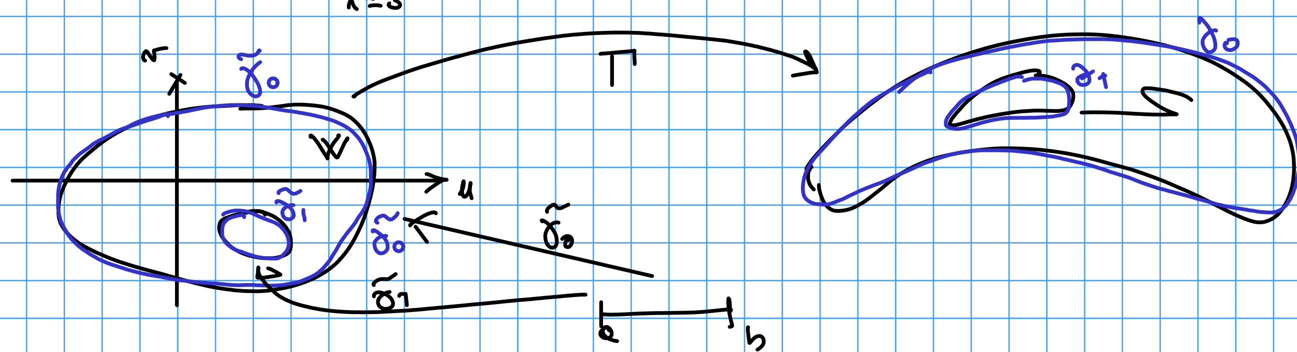
__FATTO__ Sia S una superficie parametrica.

(1) Allora $\exists k \geq 0 : \Sigma(S) = \bigcup_{i=0}^{k} \gamma_i([a,b])$ dove

$\gamma_0 \dots \gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ curve continue a tratti chiuse.

__INFATTI__ Prendo $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione. Descrivo ∂W come detto prima: dove $\tilde{\gamma}_0 \dots \tilde{\gamma}_k : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$\partial W = \bigcup_{i=0}^{k} \tilde{\gamma}_i([a,b])$$



Definisco $\gamma_i = \Gamma \circ \tilde{\gamma}_i$ $\quad \gamma_i(t) = \Gamma(\tilde{\gamma}_i(t)) \quad 0 \le t \le b$

Se ho che Γ è $C^1(W)$ allora le γ_i sono regolari a tratti
$(\vec{N}_p \neq 0$ su $W)$

Notiamo che queste γ_i possono cambiare se cambia la parametrizzazione Γ o se cambio le $\tilde{\gamma}_i$ (su W)

(2) Supponiamo che $\gamma_0 \dots \gamma_k$ e $\hat{\gamma}_0 \dots \hat{\gamma}_h$ siano delle curve chiuse che descrivono $\Sigma(S)$ come detto sopra. ALLORA SI DIMOSTRA che $k = h$
Inoltre se $\gamma_i(t) = D = \gamma_j(t_1)$

DEF (SUPERFICI ORIENTATE)
Chiamo superficie parametrica orientata una "coppia" $(S, \hat{\nu})$ in cui S è una superficie parametrica e $\hat{\nu} : S \setminus \Sigma(S) \to \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori continuo tale che $\hat{\nu}(p) \in N_p(S)$ $\forall p$, e $\|\hat{\nu}(p)\| = 1$ $\forall p$

Se S è regolare fino al bordo (cioè $\exists\, \Gamma$ parametrizzazione con $\Gamma \in C^1(W)$, $N_p \neq 0$ anche su ∂W) allora $\hat{\nu}$ si può definire su tutta S.

DEF (verso del bordo di una sup. orientata)

Se $(S, \hat{\nu})$ è una sup orientata posso scegliere le curve $\gamma_0 \dots \gamma_k$ che descrivono il bordo di S in maniera "coerente con $\hat{\nu}$" QUESTO SIGNIFICA CHE

- Prendo $\tilde{\gamma}_0 \dots \tilde{\gamma}_k$ t.c. $\Sigma(S) = \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\gamma}_i([0,b])$
  e tali che siano coerenti con W
- Prendo una parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}$, per S.

TALE CHE $\vec{N}_\Gamma(u,v)$ sia concorde con $\hat{\nu}(\Phi(u,v))$

$\forall u,v \in \mathring{W}$ SCELGO UNA PARAMETRIZZAZIONE

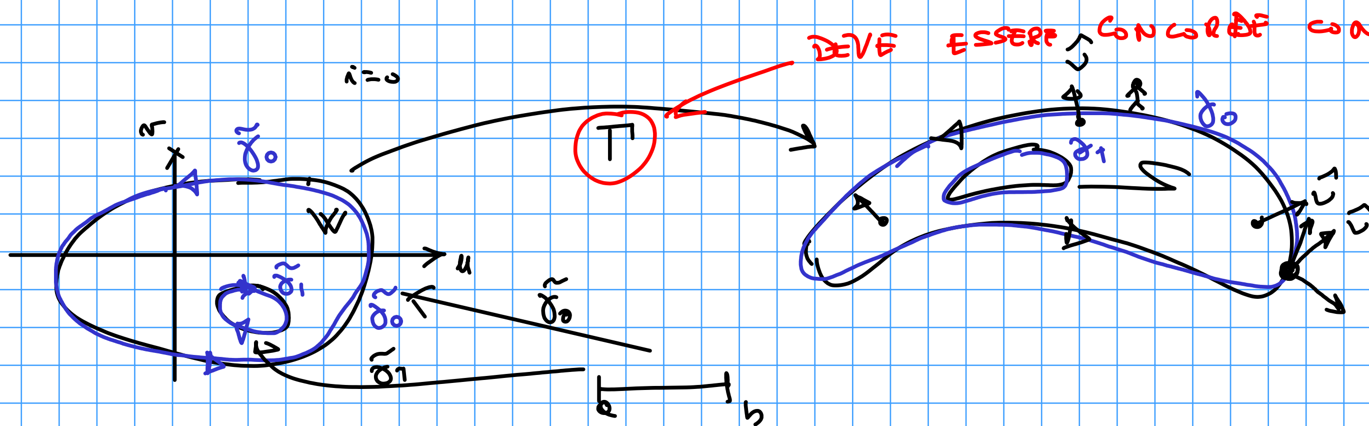
"CONCORDE" con $\hat{\nu}$

So che $\hat{\nu}(\Phi(u,v)) = \lambda(u,v)\,\vec{N}_\Gamma(u,v)$

e per connessione $\lambda > 0$ / $\lambda < 0$ $\forall u\, v$

CASO W connesso – METTIAMOCI IN QUESTO

- Definisco $\gamma_0 \dots \gamma_K$ come $\boxed{\Gamma \circ \tilde{\gamma}_0 \dots \Gamma \circ \tilde{\gamma}_K}$



IDEA: se percorro $\Sigma(S)$ lungo γ_i, CON LA TESTA diretta come la normale, tengo S a sinistra

MORALE OGNI ORIENTAMENTO DI S

(cioè ogni scelta di un campo $\hat{\nu}$ ....) è

LEGATO A UN VERSO DI $\Sigma(S)$

FINO A QUI ABBIAMO CONSIDERATO SUPERFICI PARAMETRICHE

. Se S è parametrica è sempre possibile scegliere un'orientazione: prendo Γ parametrizzazione e definisco

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}$$

dove $(u,v) \in \mathring{W}$ sono tali che $P = \Gamma(u,v)$

Se W è connesso ho due possibili orientazioni.

DEF. Se $(S, \hat{\nu})$ è una sup. par. orientata e $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ campo continuo tale che $\iint_S \|\vec{f}\| \, d\sigma < +\infty$ allora posso definire il FLUSSO di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$ ponendo

$$\boxed{\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) := \iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v) \, du \, dv}$$

dove Γ è una parametrizzazione di S CONCORDE con $\hat{\nu}$. $\left(\hat{\nu}(\phi(u,v)) = \dfrac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|N_\Gamma(u,v)\|} \right)$

Si vede facilmente che

$$\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

, basta notare che

$$\iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v) \, du \, dv =$$

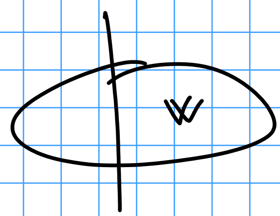
$$\iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}}_{\hat{\nu}(\phi(u,v))} \cdot \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

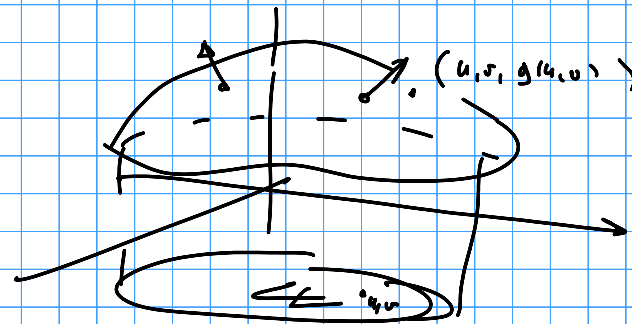
Si vede che il flusso non cambia se cambio parametrizzazione - PURCHÉ la parametrizzazione rimanga concorde con $\hat{\nu}$

DEF. (GRAFICO) Se ho una funzione $g : W \to \mathbb{R}$, W come al solito dom. reg in $\mathbb{R}^2$, posso considerare il grafico di g definito da $G_g = \{(x,y,z) : (x,y) \in W, \; z = g(x,y)\}$

Questo insieme è una sup parametrica, se $g \in C^1(\mathring{W})$ e continua su W. Infatti $G_g \in \mathbb{R}^3$ e posso considerare $\Gamma : W \to \mathbb{R}$ $\quad \Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$

CHIARAMENTE Γ è iniettiva





$G_g = \Gamma(W)$. Inoltre

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{N}_p(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u} \\ -\frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{N}_p(u,v)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} \neq 0$$

Quindi il grafico di g è una sup parametrica.

$$A(G_g) = \iint_W \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, du \, dv$$

Notate che se prendo la parametrizzazione sopra $\Rightarrow \vec{N}_p$ è concorde con $\vec{k}$ (a causa della terza componente che fa 1)

<u>ESEMPIO GIÀ VISTO</u> $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ è il grafico di

$$g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{su } W = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

IN QUESTO CASO $\vec{N}_p$ NON SI RIESCE A DEFINIRE SU $\Sigma(S)$

però $\hat{\nu}$ si potrebbe definire anche su $\Sigma'(S)$, a causa della normalizzazione.

<u>ESEMPIO</u> $\vec{f}(x,y,z) := (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (z+y)\vec{k}$

e cerchiamo $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$

$S = \{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ $\hat{\nu}$ è concorde con l'asse z (con $\vec{k}$)

Posso usare la parametrizzazione "grafico" $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_B \vec{f}(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u} \\ -\frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv =$$

$B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$

$$\iint_B \left((x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (z+y)\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{+2x}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{i} + \frac{+2y}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{j} + \vec{k}\right) du\, dv$$

$$\iint_B \frac{(u+v)2u + (u-v)2v + (\sqrt{1-u^2-v^2}+v)\sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, du\, dv =$$

$$\iint_B \frac{2u^2 + \cancel{2uv} - \cancel{2uv} + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 + v\sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, du\, dv =$$

$$\iint_B \left(\frac{1+u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + v\right) du\, dv = \iint_B \frac{1+u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \text{(coord. polari)}$$

fa zero

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \frac{1+\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1+s}{\sqrt{1-s}} \frac{ds}{2} =$$

$\sqrt{1-s} = t \qquad 1-s = t^2 \qquad -ds = 2t\,dt \qquad ds = -2t\,dt$

$$2\pi \int_0^1 \frac{1+1-t^2}{t} 2t\, dt = 4\pi \int_0^1 (2-t^2)\, dt = 4\pi\left[2t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 4\pi\left(2-\frac{1}{3}\right) = \frac{20\pi}{3}$$

??