Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 59 24/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Definizione: $S \subset \mathbb{R}^3$ è una sup. parametrica se esiste una parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ tale che $\Gamma(W) = S$.

Parametrizzazione vuol dire che

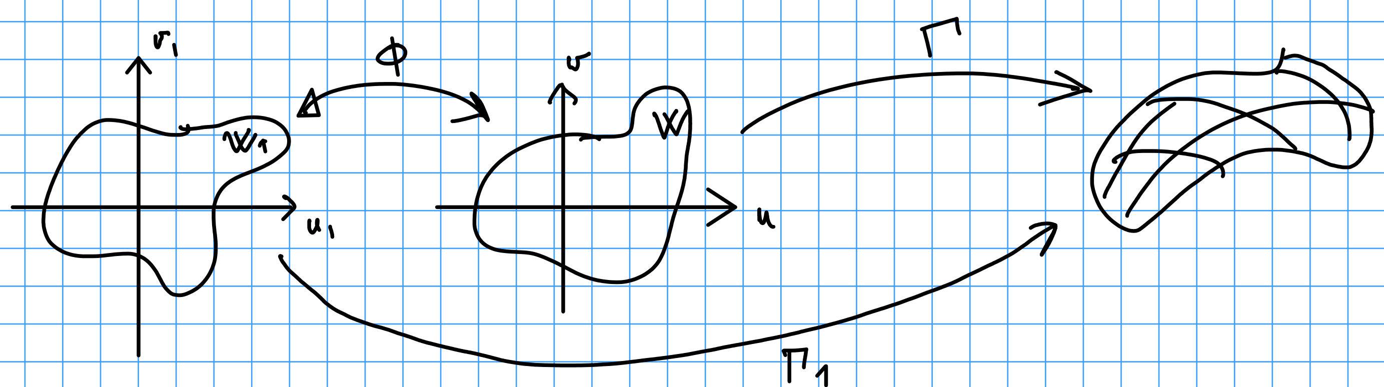
(1) $W \subset \mathbb{R}^2$ è reg. a tratti LIMITATO, Γ è $C^0(W)$, Γ è $C^1(\mathring{W})$

(2) Γ è iniettivo

(3) Posto $\vec{N}_\Gamma := \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ (in $\mathring{W}$), si ha $\vec{N}_\Gamma \neq \vec{0}$

Def. Se $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ è una param. se $\phi : W_1 \to W$ dove $W_1 \subset \mathbb{R}$ è un altro dominio LIMITATO ϕ è C^1 bigettiva da W_1 e W. $\det(J_\phi) \neq 0$.

ϕ verrà detta "CAMBIO DI PARAMETRO" oppure "RIPARAMETRIZZAZIONE"



Inoltre, se $\Gamma_1 := \Gamma \circ \phi$, Γ_1 è detta "RIPARAMETRIZZATA" DI Γ

È CHIARO CHE $\Gamma_1(W_1) = \Gamma(W) = S$

cioè Γ_1 è un'altra parametrizzazione di S

Vediamo qual è il legame tra $\underbrace{\vec{N}_\Gamma \quad e \quad \vec{N}_{\Gamma_1}}$

Devo calcolare

$$\underbrace{\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}} \qquad \Big(\Gamma_1 : \underset{W_1}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3\Big)$$

Per usare i teoremi di calcolo conviene trovo

$$\underset{3\times 2}{J_{\Gamma_1}(u_1,v_1)} = \left[\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \,\Big|\, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}\right] = J_{\Gamma\circ\phi}(u_1,v_1) = J_\Gamma(\phi(u_1,v_1))\, J_\phi(u_1,v_1)$$

$$= \underset{3\times 2}{\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\phi(u_1,v_1)) \,\Big|\, \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\phi(u_1,v_1))\right]} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} = a\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi + c\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi,$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} = b\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi + d\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi$$

devo fare $\otimes$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} = \left(a\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi + c\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi\right) \otimes \left(b\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi + d\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi\right) =$$

$$ad\, \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi}_{\vec{N}_\Gamma\circ\phi} + cb\, \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\circ\phi \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial u}\circ\phi}_{-\vec{N}_\Gamma\circ\phi}$$

$$= (ad - bc)\, \vec{N}_\Gamma\circ\phi = \det J_\phi \; \vec{N}_\Gamma\circ\phi$$

DUNQUE

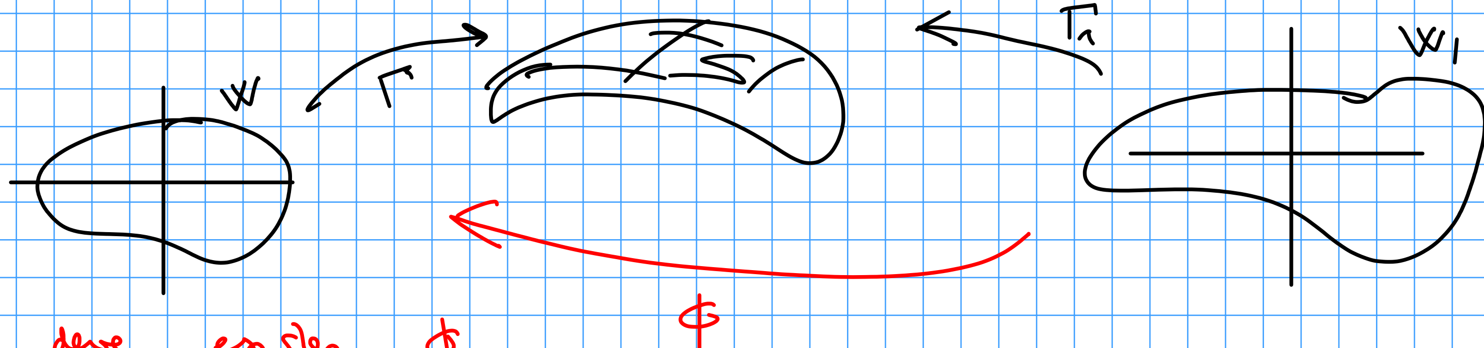
$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1) = \underbrace{\det J_\phi(u_1,v_1)}_{\neq 0 \text{ per ipotesi}} \cdot \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1))$$

Da questa formula ricavo che, se Γ e Γ_1 si ottengono mediante un cambio di parametro $\Rightarrow$

$$\{\lambda N_{\Gamma_1}(u_1,v_1) \quad \lambda\in\mathbb{R}\} = \{\lambda N_\Gamma(u,v),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$

dove $(u_1,v_1) = \phi(u,v)$

<u>TEOREMA</u> Se $S \subset \mathbb{R}^3$ e se Γ e Γ_1 sono due parametrizzazioni di S $\Rightarrow$ $\exists\ \phi$ cambio di parametro tale che $\Gamma_1 = \Gamma\circ\phi$ ($\Gamma = \Gamma_1\circ\phi^{-1}$ ...)



deve esistere ϕ

NON LO DIMOSTRIAMO

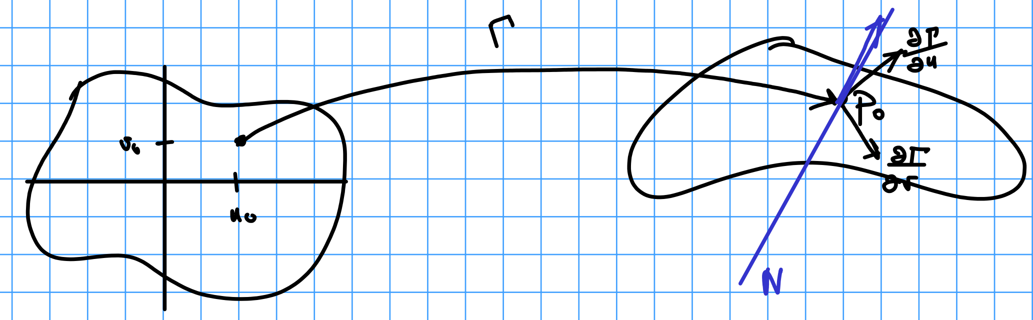
Usando il teorema sopra e dalla formula di prima possiamo definire lo spazio tangente e la retta normale a un generico punto di $S\setminus\Sigma(S)$

<u>Def.</u> S sia una sup parametrica.

Sia $P_0 \in S\setminus\Sigma(S)$

Prendiamo una parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ $(\Gamma(W)=S)$

Siano $(u_0,v_0)\in \mathring{W}$ tali che $\Gamma(u_0,v_0) = P_0$



Definisco

$$T_{P_0}(S) := \left\{ \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N_{P_0}(S) := \left\{ \lambda \vec{N}_\Gamma(u_0,v_0) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

È chiaro che $T_{P_0}(S)$ e $N_{P_0}(S)$ sono ortogonali e generano $\mathbb{R}^3$

QUESTE DEF. SONO BEN POSTE PERCHÉ SE $\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ è un'altra parametrizzazione per $S \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$ per un opportuno cambio di parametro $\phi \Rightarrow$

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1) = \det J_\phi(u_1,v_1)\, \vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)$$ ← sono sulla stessa retta

$$(\phi(u_1,v_1) = (u_0,v_0))$$

Def. S sup par. $\exists\, T_{P_0}(S)$ e $N_{P_0}(S)$ $\forall P_0 \in S \setminus \Sigma(S)$

OSS. Non si può definire il "verso" della normale
- cambiando parametrizzazione $\vec{N}_{\Gamma_1}$ può essere discorde da $\vec{N}_\Gamma$

Def. S sup parametrica. $f : S \to \mathbb{R}$ continua

Voglio definire $\displaystyle\iint_S f \, d\sigma$

Per farlo prendo una parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ $(\Gamma(W) = S)$ e pongo

$$\circledast \qquad \iint_S f \, d\sigma := \iint_W f(\Gamma(u,v)) \cdot \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

IN REALTÀ DEVO STARE ATTENTO DATO CHE $\vec{N}_\Gamma$ NON È DEFINITO SU ∂W. PIÙ PRECISAMENTE

(1) se $f \geq 0$ l'integrale è definito da $\circledast$ e può essere $+\infty$

(2) se f non è ≥ 0 (o ≤ 0) l'integrale si definisce solo se $\iint_S f^+ \, d\sigma < +\infty$ $\iint_S f^- \, d\sigma < +\infty$ e allora si pone

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_S f^+ \, d\sigma - \iint_S f^- \, d\sigma$$

PERCHÈ QUESTA DEF. SIA BEN POSTA DEVO VERIFICARE CHE, SE Γ e Γ_1 sono due parametr.

$$\Rightarrow \iint_{W_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\| \, du_1 \, dv_1 = \text{lo stesso cosa con } \Gamma$$

Mo io so che $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$, per un opportuno ϕ, e allora

$$= \iint_{W_1} f(\Gamma(\phi(u_1,v_1))) \, \|\det J\phi(u_1,v_1) \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1))\| \, du_1 \, dv_1 =$$

$|\det J\phi|$

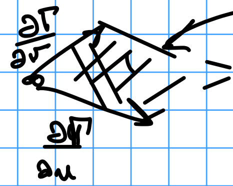
(cambio di variabile $(u,v) = \phi(u_1,v_1)$) $=$

$$\iint_W f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

NEL CASO $f = 1$ cioè calcolo

$$\iint_S d\sigma = \iint_W \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

SI CHIAMA L'AREA DI S !!



$= \| \vec{N}_P \|.$