Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 58 23/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO Data $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $0 \le f(x) \le \frac{1}{x}$. Definisco

$f_n(x) = f(nx)$

Domande (1) $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$

Devo calcolare $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \ge 1} |f(nx)| \le \sup_{x \ge 1} \frac{1}{nx} \le \frac{1}{n}$

Dunque $\|f_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$

(2) Dire se $\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \to 0$ (sottinteso se la teor. è vera per ogni possibile f con queste proprietà). Per esempio posso prendere $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{nx}$ e in questo caso

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \not\to 0$$

OSS. Se avessi l'ipotesi $f(x) \le \frac{1}{x^2}$ $\forall x \ge 1$; posto sempre $f_n(x) = f(nx)$ avrei $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2x^2}$. In questo così $0 \leq \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n^2} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{NUMERO}} \to 0$

FUNZIONEREBBE SE $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 1$

(3) $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ Devo calcolare

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_1^{+\infty} f_n(x)^2\,dx \leq \frac{1}{n^2} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

SÌ $f_n \xrightarrow{L^2} 0$

OSS. $\sum_1^\infty f_n$ converge in L^2 ??

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE È che $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{L^2} < +\infty$

Perché si dimostra che $L^2(A)$ è COMPLETO e dunque vale l'implicazione $\underbrace{\sum_1^\infty \|x_n\|}_{\in \mathbb{R}^+} < +\infty \Rightarrow \sum_1^\infty x_n$ converge in X

Nell'esempio questa proprietà NON la trovo

perché $\|f_n\|_2^2 \leq \frac{1}{n^2}\,\text{cost} \Rightarrow \|f_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{n}\,\text{cost} \leftarrow$ NON È SOMMABILE

ES. Consideriamo l'eq. diff. lineare

$$x(2x+1)\,y'' - (4x+1)\,y' - 12y = 12 + 4x^3$$

Cerco la sol. $y(x)$ nella forma $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Allora

$n-1 = m$ $n = m+1$

$$y'(x) = \sum_{0/1}^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0(-1)}^\infty a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{0/1/2}^\infty a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{0/1}^\infty a_{n+1}(n+1)n\,x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow \quad x(2x+1)\,y'' - (4x+1)\,y' - 12y =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\, n(n-1)\cdot 2 + \underbrace{a_{n+1}(n+1)\,n} - 4\,a_n\, n - \underbrace{a_{n+1}(n+1)} - 12\,a_n\right)x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+1}(n+1)(n-1) + a_n\left(2n^2-2n-4n-12\right)\right)x^n =$$

$$2n^2-6n-12 \rightarrow n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2}$$ NO RADICI INTERE

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+1}(n+1)(n-1) + 2a_n\left(n^2-3n-6\right)\right)x^n = 12+4x^3$$

DEVE FARE

DUNQUE TROVO

$$(R) \quad a_{n+1}(n+1)\underbrace{(n-1)}_{!!} + 2a_n(n^2-3n-6) = \begin{cases} 12 & \text{se } n=0 \\ 4 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{se } n\neq 0, n\neq 3 \end{cases}$$

Se $n=1$ trovo $2a_1(1-3-6)=0 \iff \boxed{a_1=0}$

Metto $n=0$ $\quad \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_1}(1)(-1) + 2a_0(-6) = 12 \iff \boxed{a_0=-1}$

Se $n=2$ trovo $a_3(3)(1) + 2a_2(4-6-6) = 0$

$3a_3 = 16a_2 \quad \boxed{a_3 = \frac{16}{3}a_2} \quad \boxed{a_2 \text{ libero}}$

Se $n=3$ $\quad a_4(4)(2) + 2a_3(9-9-6) = 4$

$8a_4 = 4 + 6a_3 \quad \boxed{a_4 = \frac{1}{2} + 8a_2}$

Se $n \geq 4$ ho $\boxed{a_{n+1} = -\frac{2(n^2-3n-6)}{n^2-1}\,a_n \qquad (R')}$

Ho trovato gli a_n. Se $a_4=0 \Rightarrow a_n=0 \quad \forall n\geq 4$

La condizione $a_4=0$ corrisponde a $\frac{1}{2}+8a_2=0 \iff a_2 = -\frac{1}{16}$

Con questo a_2 la y è un polinomio di grado 3, cioè

$$y(x) = -1 - \frac{x^2}{16} + \frac{16}{3}\left(-\frac{1}{16}\right)x^3 = -1 - \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{3}$$

che è l'unica soluzione polinomiale

Se $a_2 \neq -\frac{1}{16}$ gli a_n son tutti $\neq 0$ per $n \geq 2$. In quest caso devo capire se il raggio di convergenza R è > 0.

Ma R è dato da

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{\text{CRITERIO NOTO}}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\text{da } (R')}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2(n^2-3n-6)}{n^2-1}\right| = 2$$

Dunque $R = \frac{1}{2}$ cioè $y(x)$ È DEFINITA SU $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

definita come serie di potenze CENTRATA in 0

GUARDANDO LE DOMANDE NEL TESTO DEL COMPITINO.

(b) se metto la condizione $y(0) = -1$ quante soluzioni trovo

INFINITE perché tutte le y verificano $y(0) = -1$ $(= a_0)$ e posso scegliere a_2 a piacere

OSS. Chiamiamo $\bar{y}(x) = -1 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

è la soluzione con $y^{IV}(0) = 0$

OGNI SOL. $y(x)$ si può scrivere come

$$y(x) = \bar{y}(x) + \alpha\, y_0(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

dove $y_0(x) = \sum_{n\geq 4} a_n x^n$ e $\begin{cases} a_4 = 1 & \text{arbitrario} \\ a_{n+1} = \dfrac{2(n^2-3n-6)}{n^2-1}\, a_n & n \geq 4 \end{cases}$

perché la relazione ricorsiva è lineare negli a_n

($a_4 = 1$ corrisponde a $y^{(4)}(0) = 4! = 24$)

ES. Considera il problema

$$\begin{cases} y'' + 16y = t^2 - \pi t & 0 < t < \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Cerco $y(x) = \sum_1^\infty u_n \sin(nx)$. Mi serve lo sviluppo nei seni di $f(t) = t^2 - \pi t$. So che

$$t^2 - \pi t = \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \sin(nt) \quad \text{(fn nulli se } n \text{ è pari)}$$

Se derivo $y \rightarrow y''(t) = \sum_1^\infty u_n(-n^2)\sin(nx) \Rightarrow$ l'eq. mi dà

$$\sum_1^\infty u_n(16 - n^2)\sin(nt) = \sum_1^\infty \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \sin(nt)$$

$$(\Leftrightarrow) \qquad u_n \, (16 - n^2) = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \qquad \forall n$$

fa 0 se $n = 4$ $\rightarrow$ TORNA e u_4 è arbitrario

La sol. $y(x)$ è data da

$$y(x) = \sum_{n=1, n\neq 4}^\infty \frac{4}{\pi} \underbrace{\frac{(-1)^n - 1}{n^3(16 - n^2)}}_{\simeq \frac{1}{n^5}} \sin(nx) + \alpha \sin(4x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

y è C^3

$\exists \infty$ soluzioni

OSS. Se l'equazione fosse $y'' + 9y = t^2 - \pi t$

... stessi calcoli ...

$$u_n(9-n^2) = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^3}$$

NON $\exists$ SOL !!

Se metto $n=3$ viene $0 = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{27}\right) \neq 0$

$f(t) = \sinh(t)$ su $[-\pi,\pi]$ e poi 2π-periodic. HO TROVATO

(0 in $\pm\pi$) sempre che $f(\pi)=f(-\pi)=0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{n}{1+n^2}\sinh(\pi)\sin(nt)$$

VOGLIO CALCOLARE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ USO PARCEVAL:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi}(-1)^n\sinh(\pi)\frac{n}{1+n^2}\right)^2 =$$

$$\frac{\pi\sinh^2(\pi)}{\pi^2}\,4\sum_{1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{4}{\pi}\sinh^2(\pi)\sum\frac{n^2}{1+n^2}$$

devo calcolare l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sinh^2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}\,dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2}-2t-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{e^{2\pi}}{2}-2\pi-\frac{e^{-2\pi}}{2}}_{\pi}\underbrace{-\frac{e^{-2\pi}}{2}+2(-\pi)+\frac{e^{2\pi}}{2}}_{-\pi}\right) =$$

$$= \frac{\sinh(2\pi)}{2} - \pi \qquad \text{DUNQUE}$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \left(\frac{\sinh(2\pi)}{2}-\pi\right)\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sinh^2(\pi)} =$$

$$\frac{\pi}{4}\frac{(\sinh(\pi)\cosh\pi - \pi)}{\sinh^2(\pi)}$$

TROVARE UN POTENZIALE F PER IL CAMPO

$$\vec{f} = 2xz\,\vec{i} + 2yz\,\vec{j} + (x^2+y^2-2z)\,\vec{k}$$

(si vede che è irrotazionale e che è definito su tutto $\mathbb{R}^3 \Rightarrow F$ esiste)

UNA POSSIBILITÀ: FISSO $P_0 = (0,0,0)$. Dato $P=(x,y,z)$

considero $\gamma(t) = tP$ (il segmento da 0 e P)
$0 \le t \le 1$ $\quad \gamma'(t) = \overrightarrow{P-O}$

e pongo

$$F(P) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(t(x,y,z)) \cdot (x,y,z)\,dt =$$

$$\int_0^1 \left(t^2(2xz,\ 2yz,\ x^2+y^2)(x,y,z) + t\,-2z \cdot z \right) dt =$$

$$\int_0^1 \left[t^2 \left(2x^2z + 2y^2z + (x^2+y^2)z \right) - 2tz^2 \right] dt =$$

$$= 2\frac{x^2z}{3} + 2\frac{y^2z}{3} + \frac{1}{3}(x^2+y^2)z - z^2$$ (questo è il potenziale F t.c. $F(0,0,0)=0$)

$$= x^2z + y^2z - z^2$$

In generale ci posso aggiungere una costante

OPPURE

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xz \Rightarrow F = x^2z + c_1(y,z) \qquad (I)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz \Rightarrow F = y^2z + c_2(x,z) \qquad (II)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x^2+y^2-2z \Rightarrow F = x^2z + y^2z - z^2 + c_3(x,y) \qquad (III)$$

$$I = II \qquad x^2z + c_1(y,z) = y^2z + c_2(x,z)$$

Metto $y=0$ $\qquad x^2z + c_1(0,z) = c_2(x,z)$

$$\Rightarrow \quad c_2(y,z) = x^2 z + c_4(z)$$

Nello stesso eguaglianza nello $x=0$ $\qquad c_1(y,z) = y^2 z + c_2(0,z)$

$$\Rightarrow \quad c_1(y,z) = y^2 z + c_5(z)$$

TORNIAMO INDIETRO

$$F = x^2 z + y^2 z + c_5(z) \qquad \text{(I)}$$

$$F = y^2 z + x^2 z + c_4(z) \qquad \text{(II)}$$

$$F = x^2 z + y^2 z - z^2 + c_3(x,y) \qquad \text{(III)}$$

$$\text{I} = \text{III} \qquad \cancel{x^2 z} + \cancel{y^2 z} + c_5(z) = \cancel{x^2 z} + \cancel{y^2 z} - z^2 + c_3(x,y)$$

$$\underbrace{c_5(z) + z^2}_{\text{NON CI SONO } x,y} = \underbrace{c_3(x,y)}_{\text{NON C'È } z} \quad \leftarrow \text{DEVE ESSERE UNA COSTANTE } c$$

$$c_5(z) + z^2 = c_3(x,y) = c \qquad c_3 = c \qquad \boxed{c_5 = -z^2 + c}$$

Dallo I ottengo alla fine

$$\boxed{F = x^2 z + y^2 z - z^2 + c}$$

NOZIONE DI SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$

(l'idea è la stessa della nozione di curva regolare : " TRASFERIRE UNA COSA BIDIMENSIONALE IN $\mathbb{R}^3$ ")

DUNQUE SI PRENDE UN Dominio REGOLARE A TRATTI $\boxed{W \subset \mathbb{R}^2}$ e una applicazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$

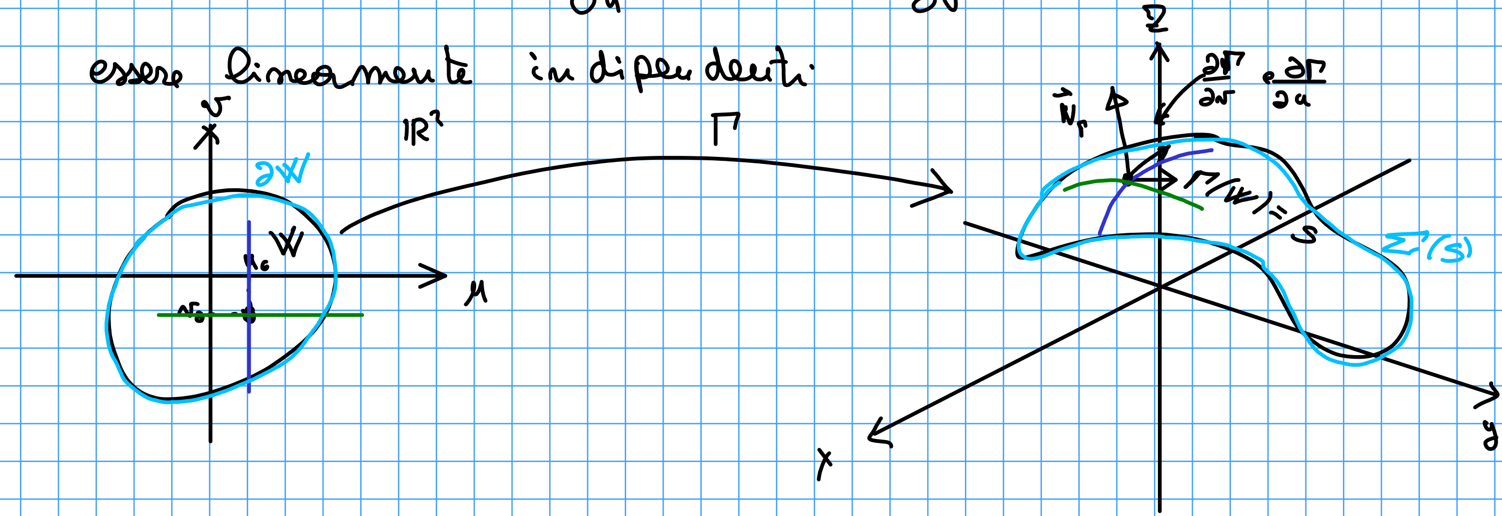
(N.B W è un chiuso definito con $W = \{G_1 \le 0, G_2 \le 0 \dots G_k \le 0\}$ con condizioni di trasversalità sui ∇G_i)

SU Γ chiedo le seguenti cose:

(1) Γ continua su W e C^1 su $\mathring{W}$

(2) Γ iniettiva

(3) $\forall (u,v) \in \mathring{W}$ $\quad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v)$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)$ devono essere linearmente indipendenti



Noto che $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v)$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)$ sono due vettori tangenti a $S = \Gamma(W)$. DUNQUE IL LORO PRODOTTO VETTORE

$$\vec{N}_\Gamma (u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)$$

è $\neq 0$ (per l'ipotesi 3) ed è ortogonale al piano generato da $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}$

La (3) $\iff$ $\vec{N}_\Gamma (u,v) \neq 0$ se $\vec{N}_\Gamma$ è quello sopra.

<u>Def.</u> Se Γ e W sono come sopra dico che $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ è una "PARAMETRIZZAZIONE" e che

$S := \Gamma(W)$ è una "superficie parametrica"

IN SOSTANZA $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrica

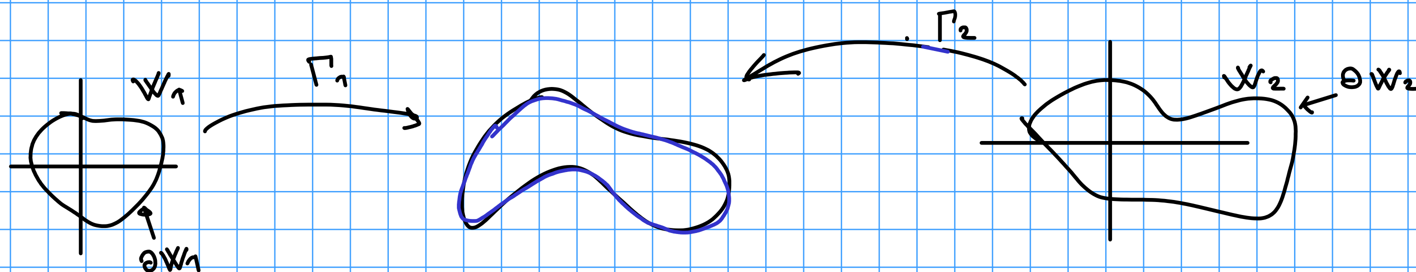
se esiste una Parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ per cui
$\Gamma(W) = S$

<u>Def</u> (contorno) Se Γ è come sopra chiamo "bordo" di S l'insieme

$$\Sigma(S) := \Gamma(\partial W)$$

La def. sta in piedi perché si <u>può dim.</u> che:

$\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_2 : W_2 \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni per $S \Rightarrow \Gamma_1(\partial W_1) = \Gamma_2(\partial W_2)$



ATTENZIONE BORDO $\neq$ FRONTIERA

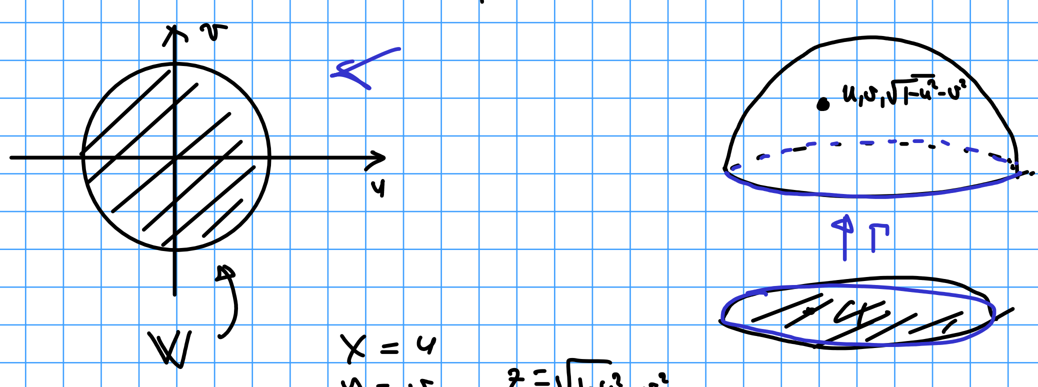
È ragionevole che $\partial S = S \neq \Sigma(S)$

Per definire $\Sigma(S)$ <u>MI SERVE LA PARAMETRIZZAZIONE</u>

<u>ESEMPIO</u> $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0 \}$

S è una superficie che ha come (possibile) parametrizzazione

$\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ su $W = \{ u^2 + v^2 \leq 1 \}$



$x = u$
$y = v$ $\quad z = \sqrt{1-u^2-v^2}$

Verifichiamo che Γ è una parametrizzazione:

- Γ è continua su W sì

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

Si vede dunque che Γ è C^1 su $\{u^2+v^2<1\}$

- Γ è iniettiva sì

$$\vec{N}_p = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \det \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \Gamma(u,v) \neq \vec{0}$$

DUNQUE S è una sup parametrica e

$$\Sigma(S) = \Gamma(\underbrace{\{u^2+v^2=1\}}_{\in \mathbb{R}^2}) = \underbrace{\{(u,v,0) : u^2+v^2=1\}}_{\in \mathbb{R}^3}$$

LE COORDINATE SFERICHE ??

θ φ tali che
$$x = \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \cos\varphi$$

SUGGERISCONO DI PRENDERE $\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Chi prendo come W ?? $0 \le \theta \le 2\pi$ $0 \le \varphi \le \pi/2$

(VOGLIO DESCRIVERE DI NUOVO $S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$)

PROBLEMA 1: Γ NON È INIETTIVA: $\Gamma(0,\varphi) = \Gamma(2\pi,\varphi)$

Calcoliamo $\vec{N}_P = \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} =$

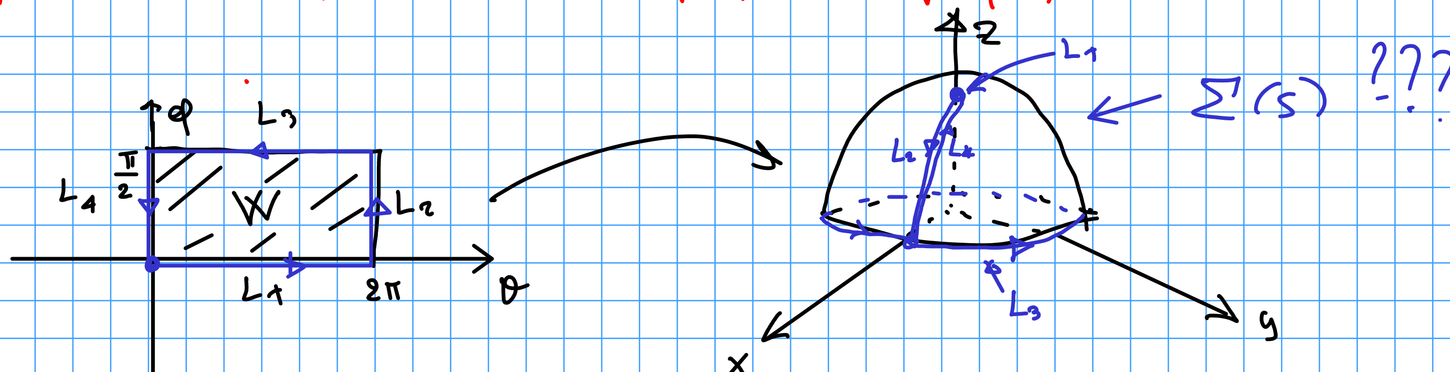
$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}$

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi \\ \vec{j} & \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi \\ \vec{k} & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi \det \begin{bmatrix} i & -\sin\theta & \cos\theta \cos\varphi \\ j & \cos\theta & \sin\theta \cos\varphi \\ k & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi \begin{bmatrix} -\cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi(-\sin^2\theta - \cos^2\theta) \end{bmatrix} = -\sin\varphi \, \Gamma(\theta, \varphi)$$

"Problema 2" $\vec{N}_P |\theta, \varphi| = 0$ se $\varphi = 0, \pi$ IN REALTÀ NON SAREBBE UN PROBLEMA PERCHÉ $(\theta, 0) \in \partial W$



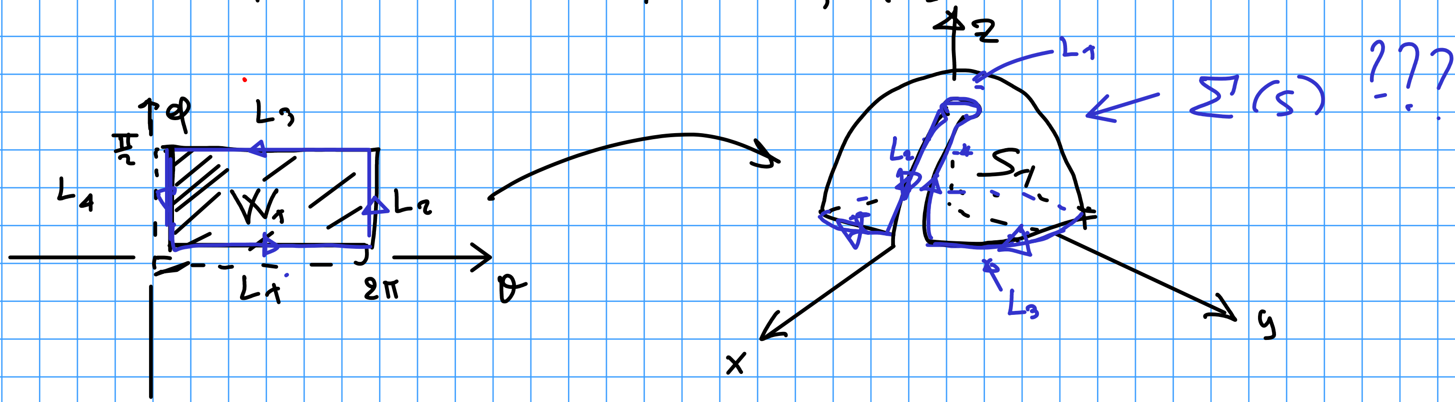
Cosa viene se cerco di costruire $\Sigma(S)$ con questo Γ

$\partial W = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

IL BORDO NON È QUELLO CHE VOGLIO !!

IL PROBLEMA È CHE Γ NON È INIETTIVA

Prendiamo $W_1 \subset W$ $\quad W_1 = \{\varepsilon \le \theta \le 2\pi, \varepsilon \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$



ORA Γ è iniettivo e il bordo torna