Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 22/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$\vec{f}$ CONSERVATIVA $\Rightarrow$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE, MA $\Leftarrow$ IN GENERALE NON VALE.

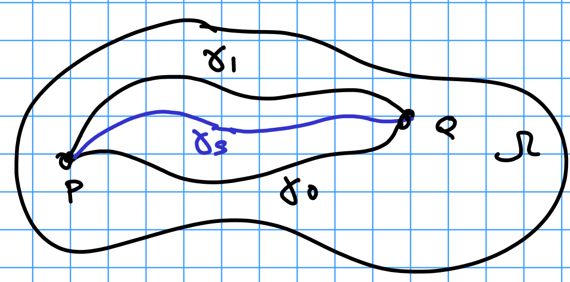
COSA CI VUOLE PERCHÉ $\Leftarrow$ SIA vera? Ci vuole una proprietà del dominio Ω di $\vec{f}$: Ω non deve avere "buchi" ??

Def. (OMOTOPIA TRA CURVE). Sia dato Ω aperto in $\mathbb{R}^n$

(a) Siano γ_0 e γ_1 due curve continue in Ω con gli stessi estremi:

$$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega, \quad \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

Dico che γ_0 e γ_1 sono OMOTOPE "a estremi fissi" se esiste



$H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, CONTINUA

e tale che

- $H(t,0) = \gamma_0(t)$ $\quad H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = \underset{\overset{\parallel}{P}}{H(0,s)}$, $\quad H(b,s) = \underset{\overset{\parallel}{Q}}{H(0,s)}$ $\quad \forall s \in [0,1]$

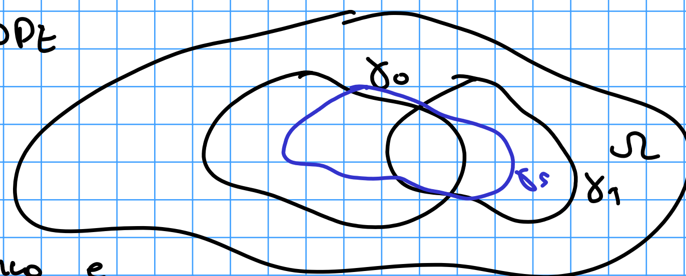
Tale H si chiama OMOTOPIA tra γ_0 e γ_1 a estremi fissi

L'idea è che, se chiamo $\gamma_s(t) = H(t,s)$, allora γ_s è una curva in Ω, che ha gli stessi estremi di γ_0 e γ_1, e che si muove con continuità tra γ_0 e γ_1

(b) Se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse in Ω:

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, continue, $\gamma_0(b) = \gamma_0(a)$ $\quad \gamma_1(b) = \gamma_1(a)$

Dico che γ_0 e γ_1 sono OMOTOPE "come curve chiuse" se esiste H (OMOTOPIA)



$H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continua e

- $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = H(b,s)$ $\quad \forall s \in [0,1]$

TEOREMA Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $\vec{f}$ è C^1 ed è irrotazionale, allora

(1) $$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

per ogni coppia di curve γ_0 e γ_1 (C' a tratti) aventi gli stessi estremi e OMOTOPE (nel senso a).

OPPURE POSSO DIRE CHE

(2) $$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

per ogni coppia di curve chiuse (C' a tratti) omotope nel senso b

DIM (parziale) della (2) Supponiamo che γ_0 e γ_1 siano C^1, siano chiuse e che esista un'omotopia di classe C^1

Voglio dimostrare la formula 2. Per questa dimostrazione che, se $\gamma_s(t) = H(t,s)$, allora

$$\phi(s) := \int_{\gamma_s} \vec{g} \cdot d\vec{s} \quad \text{è costante in } s$$

Per questo calcoliamo $\phi'(s)$ e mostriamo che $\phi'(s) = 0 \quad \forall s \in [0,1]$

derivata in t

$$\phi'(s) = \frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{ds} \int_a^b \vec{g}(\gamma_s(t)) \cdot \gamma_s'(t)\, dt =$$

$$\frac{d}{ds} \int_a^b \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s)\, dt = \quad (\text{si può fare})$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left(\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) \right) dt =$$

$$\int_a^b \left[\left(J_{\vec{g}}(H(t,s)) \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) + \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} H(t,s) \right] dt =$$

Il fatto che $\vec{g}$ è irrotazionale $\Leftrightarrow$ $J_{\vec{g}}$ è simmetrica

A è simmetrica $\Leftrightarrow$ $A\vec{v} \cdot \vec{w} = A\vec{w} \cdot \vec{v}$

$$= \int_a^b \left[\left(J_{\vec{g}}(H(t,s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t,s) \right) \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(t,s) + \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} H(t,s) \right] dt$$

$\parallel$ (tornando indietro con t al posto di s)

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right) dt =$$

$$\left[\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right]_a^b = \vec{g}(H(b,s)) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} H(b,s) - \vec{g}(H(a,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(a,s)}_{= (*)}$$

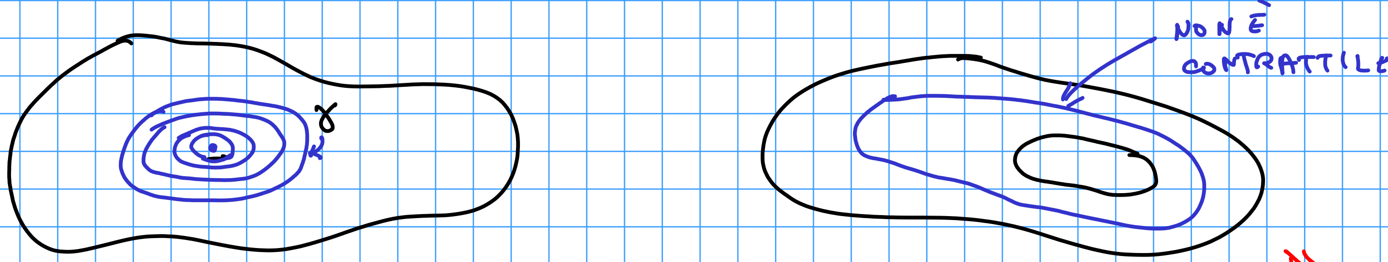
$=$ (per ipotesi)

$= 0$!!

Nell'ipotesi che H sia C^1 e $H(a,s) = H(s,b)$ $\Rightarrow$ (deriv. in s)

$$\frac{\partial}{\partial s} H(a,s) = \frac{\partial}{\partial s} H(b,s)$$ dunque anche $(*)$ vale.

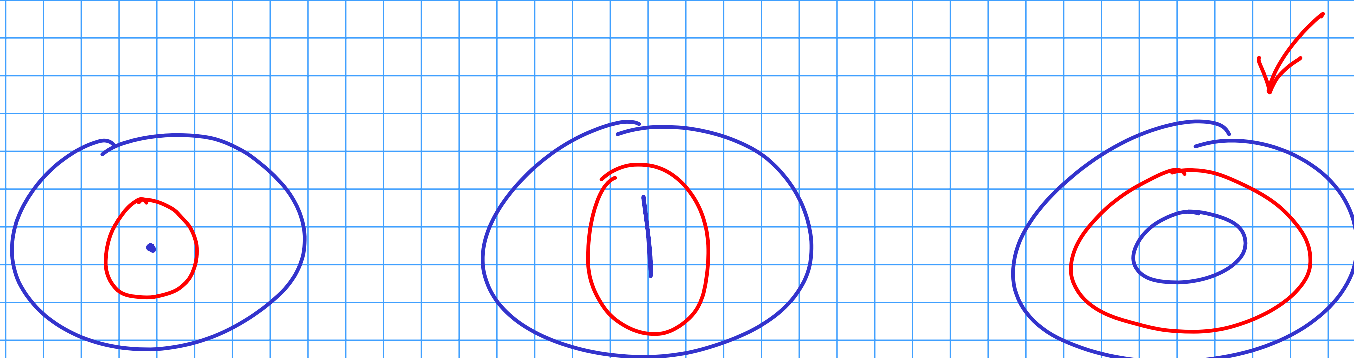
Def. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa in Ω è OMOTOPA A UNA (CURVA) costante (ogni curva chiusa è "CONTRATTILE" in Ω)



S.C. NON È S.C.

Ω NON "HA BUCHI" (QUANDO SIAMO IN $\mathbb{R}^2$!!)

TEOREMA Se Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO, ALLORA OGNI CAMPO IRROTAZIONALE $\vec{f}$ È CONSERVATIVO



NESSUNO è S.C.

Dim Basta dim. che per ogni curva chiusa γ, $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$

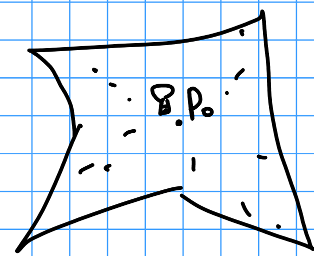
Dato che Ω è S.C. so che γ è omotopa a una curva costante $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma}(t) = P \quad \forall t$). Dato che $\vec{f}$ è irrotazionale

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\bar{\gamma}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{perché } \bar{\gamma} \text{ è costante} \Rightarrow \bar{\gamma}' = 0)$$

PUÒ ESSERE UTILE AVERE UN CRITERIO PER DIRE SE UN INSIEME È SEMPLICEMENTE CONNESSO.

CONDIZIONE SUFFICIENTE: Se Ω è "STELLATO" rispetto e un suo punto P_0 $\Longrightarrow$ Ω è semplicemente connesso.

Ω si dice "stellato rispetto a P_0" ($P_0 \in \Omega$) se



$\forall P \in \Omega \quad \forall t \in [0,1]$

$$P_0 + t(P - P_0) \in \Omega$$

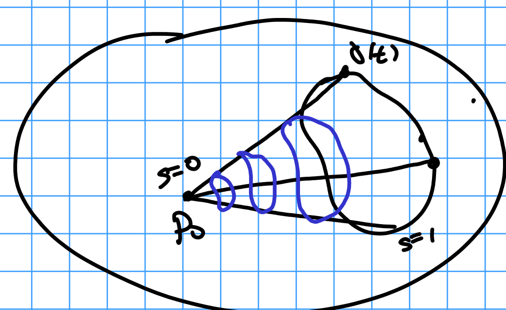
Cioè per ogni $P \in \Omega$ il segmento da P_0 a P è interamente contenuto in Ω.

PER ESEMPIO SE Ω è CONVESSO $\Longrightarrow$ Ω è stellato rispetto a ogni punto di Ω $\Longrightarrow$ Ω è S.C.

<u>Dim</u> STELLATO $\Longrightarrow$ S.C.

Suppongo Ω stellato rispetto a $P_0 \in \Omega$. Prendo $\gamma : [0,b] \to \Omega$ chiuso e continuo. Definisco l'omotopia $H(t,s)$ ponendo

$$H(t,s) = P_0 + s\big(\gamma(t) - P_0\big)$$



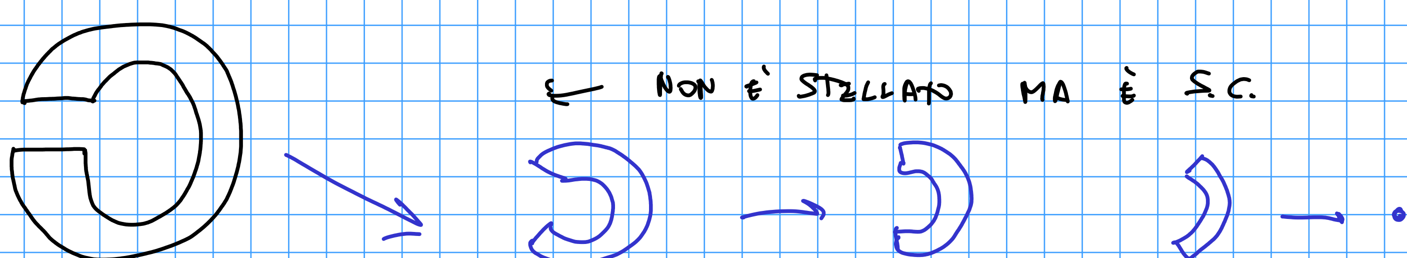
Si vede che H è continua

(1) $\left.\begin{aligned} H(0,s) &= P_0 + s(\gamma(0) - P_0) \\ H(b,s) &= P_0 + s(\gamma(b) - P_0) \end{aligned}\right\} =$

(2) $H(t,1) = P_0 + \gamma(t) - P = \gamma(t)$

$H(t,0) = P_0$ ← costante

<u>OSS.</u> STELLATO NON È NECESSARIO



← NON È STELLATO MA È S.C.

OSS. ANCHE SE Ω NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO POSSONO ESISTERE CAMPI CONSERVATIVI

Per esempio $\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ è conservativo IN quanto radiale!! ed è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

($\vec{f}$ radiale se $\vec{f}(P) = \phi(\|P\|)\,\hat{P} = \phi(\|P\|)\frac{P}{\|P\|}$ — RISPETTO ALL'ORIGINE)

In questo caso $\phi(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|}$ e dunque il potenziale è

$$F(x,y) = \ln(\|x,y\|) + \text{cost.}$$

IL FATTO CHE $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non sia semplicemente connesso discende dall'esempio dell'altra volta: esiste un campo irrotazionale $\vec{f}$ definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e una curva chiusa γ per cui $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \neq 0$

$$\boxed{\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}}$$

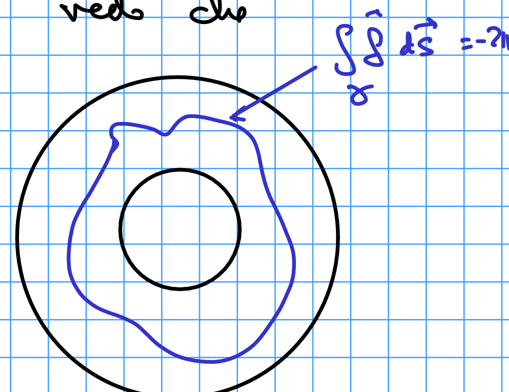
DOMANDA $\Omega = \{1 < x^2+y^2 < 4\}$ è semplicemente connesso.

NO. Prendo $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}j$,

prendo $\gamma(t) = \frac{3}{2}\left(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}\right)$ e vedo che

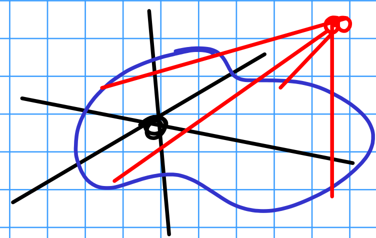
(1) $\vec{f}$ è irrotazionale

(2) $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \neq 0$ $(-2\pi\ ?)$



OSS $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso

(non è immediata la dim., ma è intuitivo!)



$\mathbb{R}^3 \setminus$ retta NON È S.C.

Per esempio $\boxed{\mathbb{R}^3 \setminus \underbrace{\{x=y=0\}}_{\text{asse } z}}$. Per far vedere che NON è s.c. uso lo stesso campo di prima $\vec{f}(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}$

Di nuovo $\vec{f}$ è irrotazionale (si vede facilmente) e $\oint_\gamma \vec{f}\, ds \neq 0$ se γ è una circonferenza che "allaccia" l'asse z.

$\left(\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-2} \text{ NON È s.c.} \right)$

OSS. Il campo lineare $\vec{f}(x) = Ax$ con A matrice $N \times N$ è conservativo $\Leftrightarrow$ A è simmetrica

perché irrotazionale $\Leftrightarrow$ A simmetrica

$$f_i = (Ax)_i = \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ik} x_k =$$

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \qquad \left(\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \right)$$

IRROTAZIONALE $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ cioè A simmetrica

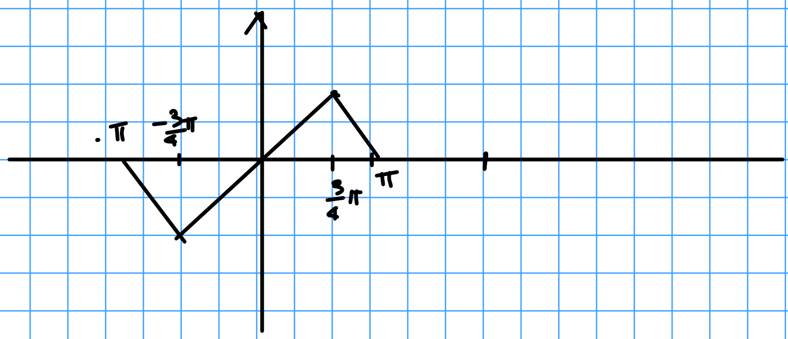
DUNQUE $\vec{f}$ conservativo $\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $\vec{f}$ irrotazionale $\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ A simmetrica

perché $\mathbb{R}^N$ è s.c.

ESERCIZIO

$$f(t) := \begin{cases} t & |t| < \frac{3}{4}\pi \\ 3(\pi - t) & \frac{3}{4}\pi \le t \le \pi \\ -3(\pi + t) & -\pi \le t \le -\frac{3}{4}\pi \end{cases}$$ ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-per.

Voglio la serie di Fourier di f. $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} f(t) \sin(nt)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi} \left[f(t) \frac{\cos(nt)}{-n} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \overset{1}{f'(t)} \cos(nt)\, dt +$$

$$\frac{2}{\pi} \left[f(t) \frac{\cos(nt)}{-n} \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \overset{-3}{f'(t)} \cos(nt)\, dt =$$

$$-\frac{1}{n} \frac{2}{\pi} \cancel{f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)} \cos\left(n \tfrac{3}{4}\pi\right) + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \cos(nt)\, dt +$$

$$-\frac{1}{n} \frac{2}{\pi} f(\pi) \underbrace{\cos(n\pi)}_{=0} + \frac{1}{n} \frac{2}{\pi} \cancel{f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)} \cos\left(\tfrac{3}{4} n\pi\right) - \frac{6}{n\pi} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \cos(nt)\, dt =$$

$$+ \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\sin(n\pi)}{n} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} - \frac{6}{n\pi} \left[\frac{\sin(n\pi)}{n} \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} =$$

$$+ \frac{8}{n^2\pi} \left(\sin\left(\frac{3}{4} n\pi\right) \right)$$

DUNQUE

$$f(t) \underset{\text{UNIF.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi} \sin\left(\frac{3}{4} n\pi\right) \sin(nt)$$

(N.B. $|b_n| \simeq \frac{1}{n^2}$ dunque la convergenza è unif.!)

Se metto $t = \frac{3}{4}\pi$ trovo $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi} \sin\left(\frac{3}{4}n\pi\right)^2 \Longleftrightarrow$

$$\sum \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{3}{4}n\pi\right) = \frac{\pi}{8} f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\pi}{8}\,\frac{3}{4}\pi = \frac{3\pi}{32}$$!!