Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 17/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Visto: • $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\vec{f}$ CONTINUO) $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ è conservativo se
$\exists$ $F : \Omega \to \mathbb{R}$ (potenziale) t.c. $\nabla F = \vec{f}$
(F è C^1)

• $\vec{f}$ è conservativo $\iff$ $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ $\forall \gamma$ chiuso (in Ω)

($\iff$ $\int_\gamma \vec{f} \cdot ds$ DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI)

DEF. Suppongo che $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1.
DIRÒ che $\vec{f}$ è irrotazionale se

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall i,j = 1 \dots N \quad (i \neq j)$$

NOTIAMO CHE se $N=3$ è definito il "rotore di $\vec{f}$" (lo vedremo) e allora IRROTAZIONALE $\iff$ $\mathrm{rot}\, \vec{f} = 0$
(se $N \neq 3$ il rotore non c'è ..)

FATTO SEMPLICE Se $\vec{f}$ è C^1 allora

$\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ irrotazionale

infatti: se esiste $F: \Omega \to \mathbb{R}$ potenziale allora F è di classe C^2 (perché $\vec{f}$ è C^1) e allora

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$$

COINCIDONO PER Schwartz

PROBLEMA: vale il viceversa?? IN GENERALE NO:

ci sono campi irrotazionali ma non conservativi.

ESEMPIO Considero $\vec{f}: \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}_{} \to \mathbb{R}^2$ definito da

NON È DEFINITO IN (0,0)

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$(\vec{i} = \hat{e}_1 \quad \vec{j} = \hat{e}_2 \quad \vec{k} = \vec{e}_3)$

Vediamo che $\vec{f}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(x^2+y^2)+x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

=

Vediamo che $\vec{f}$ NON È conservativo. Per questo facciamo vedere che c'è una curva chiusa γ per cui $\oint_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} \neq 0$

PRENDO $\gamma(t) = R\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

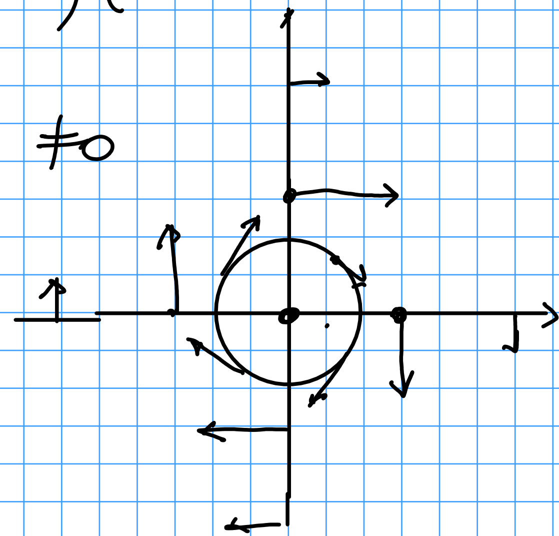
allora $\gamma'(t) = R\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)$ e

$$\int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{g}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cancel{R}\sin(t)}{\cancel{R^2}}\vec{i} - \frac{\cancel{R}\cos(t)}{\cancel{R^2}}\vec{j}\right)\left(-\cancel{R}\sin(t)\,\vec{i} + \cancel{R}\cos(t)\,\vec{j}\right)dt =$$

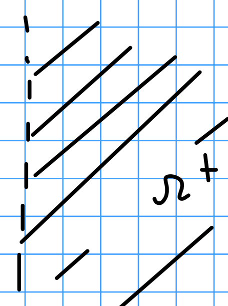
$$\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2(t) - \cos^2(t)\right)dt = -2\pi \neq 0$$

$\vec{g}$ NON È CONSERVATIVO



IL PROBLEMA È CHE $\vec{g}$ NON È DEFINITO IN $(0,0)$

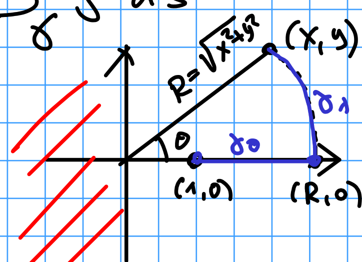
OSS. Se consideriamo $\Omega^+ = \{(x,y) : x>0\}$ il camp $\vec{g}$ di prima è conservativo su Ω^+



Vediamo che esiste un potenziale per $\vec{g}$

Per trovare $F(x,y)$ facciamo $\int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s}$

dove γ è fatto come nel disegno $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$



$$\begin{cases}\gamma_0(t) = (1,0) + t\,(R-1,0) \\ \quad = (1+t(R-1),\ 0)\end{cases}$$

$\gamma_0 = (t,0) \quad 1 \le t \le R$

Calcoliamo gli integrali di $\vec{g}$ su γ_0 e su γ_1

$$\int_{\gamma_0}\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \underbrace{\left(0\,\vec{i} - \frac{1+t(R-1)}{(R-1)^2}\vec{j}\right)(R-1)\vec{i}}_{=0}$$

OPPURE CON LA SECONDA γ_0 : $\displaystyle\int^R\left(\frac{0}{t^2}\vec{i} - \frac{t}{t^2}\vec{j}\right)\vec{i}\,dt = 0$

$\gamma_1(t) = R\cos(t)\,\vec{i} + R\sin(t)\,\vec{j} \qquad$ per $t \in [0,\theta]$

dove θ è l'angolo tale che $(x,y) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$

$$\int_{\partial_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\theta}\left(\frac{R\sin(t)}{R^2}\vec{i} - \frac{R\cos(t)}{R^2}\vec{j}\right)\left(-R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}\right) =$$

$$-\int_0^{\theta} 1\, dt = -\theta$$

DUNQUE VORREI USARE $F(x,y) = -\theta$.

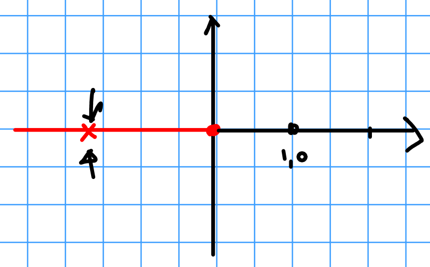
se $(x,y)\in\Omega^+$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$

VERIFICHIAMO che $F(x,y) := -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ è effettivamente un potenziale per $\vec{f}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

EFFETTIVAMENTE $F(x,y) := \mathrm{Arg}(x,y)$ è un potenziale per $\vec{f}$ sul semipiano $\{x>0\}$. Potrei anche "allargarmi" e estendere F a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ y=0,\ x\le 0\}$



PERÒ I LIMITI "DA SOPRA" E "DA SOTTO" DI F NEI PUNTI $(x,0)$ con $x<0$ sono $\neq$ (π e $-\pi$)

MORALE DELL'ESEMPIO Se $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ è irrotazionale, per vedere se $\vec{g}$ è conservativo BISOGNA GUARDARE COME È FATTO Ω.

" Ω non deve avere buchi "