Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 15/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CAMPI CONSERVATIVI (E IRROTAZIONALI)

Def. Chiamo "campo di vettori" una funzione $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (stesso N in partenza e in arrivo)

Def. Dico che un campo $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ è conservativo se $\vec{f}$ è continuo ed esiste $F: \Omega \to \mathbb{R}$, di classe C^1, tale che

$$\nabla F = \vec{f} \text{ in } \Omega \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = f_i(x) \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots N \\ \forall x \in \Omega \end{array}$$

F si chiama "potenziale" di $\vec{f}$ (quando esiste ..)

OSS. Se $N = 1$ per ogni $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua esiste la primitiva

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad (x_0 \in]a,b[) \qquad F' = f$$ dunque

ogni campo unidimensionale (continuo) è conservativo.

COSA SUCCEDE SE $N > 1$. Proviamo a vedere se un campo lineare è conservativo :

Per semplicità prendo $N=2$ e considero

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è continua. Supponiamo che $\vec{f}$ ammetta un potenziale $F(x,y)$ $(F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Allora

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = ax + by \qquad (2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = cx + dy$$

Dalla (1) $\Rightarrow$ $F(x,y) = F(0,y) = \int_0^x \frac{\partial F}{\partial x}(t,y)\, dt$ (integro in x)

$$= F(0,y) + \int_0^x (at + by)\, dt = \left[\frac{at^2}{2} + byt \right]_0^x =$$

$$\underline{F(0,y) + \frac{ax^2}{2} + bxy}$$

Per lo stesso motivo, usando (2) e integrando in y:

$$F(x,y) = F(x,0) + \int_0^y \frac{\partial F}{\partial y}(x,t)\, dt = F(x,0) + \int_0^y (cx + dt)\, dt =$$

$$\underline{F(x,0) + cxy + \frac{dy^2}{2}}.$$

NE SEGUE :

$$F(0,y) + \frac{ax^2}{2} + bxy = F(x,0) + cxy + \frac{dy^2}{2} \qquad \forall x, \forall y$$

Metto $y=0$
Metto $x=0$

$$\boxed{\begin{aligned} F(0,0) + \frac{ax^2}{2} &= F(x,0) \\ F(0,y) &= F(0,0) + \frac{dy^2}{2} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ li rimetto sopra

$$\cancel{F(0,0)} + \cancel{\frac{dy^2}{2}} + \cancel{\frac{ax^2}{2}} + bxy = \cancel{F(0,0)} + \cancel{\frac{ax^2}{2}} + cxy + \cancel{\frac{dy^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad bxy = cxy \quad \forall x, \forall y \qquad \boxed{b = c}$$

DUNQUE $\vec{f}$ è conservativo $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $b=c$ (A è simmetrica)

Viceversa se $b=c$ vedo che $F(x,y) := \frac{a x^2}{2} + bxy + \frac{d y^2}{2}$ (+cost)
è effettivamente un potenziale

- DUNQUE NON TUTTI I CAMPI SONO CONSERVATIVI

Ricordiamo gli integrali curvilinei di II° specie; $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ continuo

$\gamma: [a,b] \to \Omega$ C^1 (C^1 a tratti)

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

D'ora in avanti ho un campo $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$

<u>OSS.</u> Se F è un potenziale di $\vec{f}$, e se $\gamma: [a,b] \to \Omega$ è una curva C^1 trovo che

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\frac{d}{dt} F(\gamma(t))}\, dt =$$

$$\int_a^b \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right) dt = \Big[F(\gamma(t)) \Big]_a^b =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

In altri termini $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = F(P) - F(Q)$ dove P e Q sono gli estremi di γ

<u>TEOREMA</u> (Caratterizzazione della "conservatività" mediante gli integrali sulle curve).

Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$, continuo, sono equivalenti

(a) $\vec{f}$ è conservativo

(b) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ sono curve C^1, aventi gli stessi estremi ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$), allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(c) Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è C^1 ed è chiusa ($\gamma(b) = \gamma(a)$), allora

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

INOLTRE, (d) se $\vec{f}$ è conservativo $\boxed{\text{Se } \Omega \text{ è connesso}}$ (e cioè se valgono (a), (b), (c)) tutti i potenziali F di $\vec{f}$ sono dati dalla seguente formula:

$$F(P) = F(P_0) + \int_{P_0}^{P} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$ ← INTENDO $\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ con γ una qualunque curva in Ω, C^1 a tratti che congiunge P_0 a P

(F è ben definita a causa di (b))

al variare di P_0 in Ω.

<u>DIM.</u> (a) ⇒ (b) è l'osservazione di prima.

(b) ⇒ (c) Supponiamo che valga (b) (e dimostriamo (c))

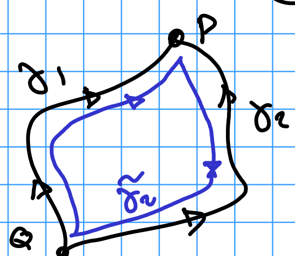
Prendiamo $\gamma : [a,b] \to C$ CHIUSA: $\gamma(a) = \gamma(b) = \bar{P}$

Posso prendere $\gamma_1(t) = \bar{P}$ (costante). A causa di (b)

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

perché γ_1 è costante

(c) ⇒ (b) Se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi



Posso costruire $\gamma := \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$

⇒ γ è chiusa

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

ABBIAMO FINO A QUI CHE $(a) \Rightarrow (b) \Longleftrightarrow (c)$

Vediamo che $(b) \Rightarrow (a)$ e contemporaneamente che vale (d)

Basta far vedere che, FISSATO $P_0 \in \Omega$, e definita F come

$$F(P) = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s} \qquad \text{dove } \gamma \leftarrow \text{in } \Omega, \text{ c' a tratti, congiunge } P_0 \text{ e } P$$

ha senso a causa della (b)

questa F è un potenziale per $\vec{f}$.

DIMOSTRIAMO DUNQUE che questa F è un potenziale.

Fisso i da 1 a N e cerco di calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(P) = \lim_{h\to 0} \frac{F(P+h\hat{e}_i) - F(P)}{h} = \qquad \text{in un } P \in \Omega$$

Ω (connesso - per archi)

So che $F(P) = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ dove $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $\gamma(a) = P_0$, $\gamma(b) = P$

Mi serve una γ_h che congiunge P_0 a $P + h\hat{e}_i$.

Considero S_h il segmento tra P e $P + h\hat{e}_i$

$0 \le t \le 1 \qquad S_h(t) = P + t h \hat{e}_i \qquad$ e prendo $\gamma_h = \gamma \cup S_h$

Se faccio il rapporto incrementale

$$\frac{1}{h}\left(F(P+h\hat{e}_i)-F(P)\right)=\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_h}\vec{f}\cdot d\vec{s}-\int_{\gamma}\vec{f}\cdot d\vec{s}\right)=$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma}\vec{f}\cdot d\vec{s}+\int_{S_h}\vec{f}\cdot d\vec{s}-\int_{\gamma}\vec{f}\cdot d\vec{s}\right)=\frac{1}{h}\int_{S_h}\vec{f}\cdot d\vec{s}=$$

$$\frac{1}{h}\int_0^1\vec{f}(\underbrace{P+th\hat{e}_i}_{S_h})\cdot\underbrace{h\hat{e}_i}_{S_h'}\,dt=\int_0^1\vec{f}(P+th\hat{e}_i)\cdot\hat{e}_i\,dt$$

Se $h\to 0$ (uso un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale – FIDIAMOCI CHE FUNZIONA)

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(P+h\hat{e}_i)-F(P)}{h}=\int_0^1\vec{f}(P)\cdot\hat{e}_i\,dt=f_i(P)$$

cioè $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)=f_i(P)$

#

ESEMPI RITORNIAMO A $\vec{f}(P)=AP$ con A matrice $N\times N$ (comp. lineare – caso di dim. N)

(1) Se A è simmetrica posso considerare $F(P)=\frac{1}{2}(AP\cdot P)$ (la forma quadratica). Si vede che $\nabla F(P)\doteq AP=\vec{f}(P)$

INFATTI

$$\frac{F(P+h\hat{e}_i)-F(P)}{h}=\frac{1}{2h}\left(A(P+h\hat{e}_i)\cdot(P+h\hat{e}_i)-AP\cdot P\right)=$$

$$\frac{1}{2h}\left(\cancel{AP\cdot P}+hAP\cdot\hat{e}_i+hA\hat{e}_i\cdot P+h^2A\hat{e}_i\hat{e}_i-\cancel{AP\cdot P}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(AP\cdot\hat{e}_i+A\hat{e}_i\cdot P+hA\hat{e}_i\hat{e}_i\right)\xrightarrow{h\to 0}\frac{1}{2}\left(AP\cdot\hat{e}_i+A\hat{e}_i\cdot P\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AP \cdot \hat{e}_i + A^t P \, \hat{e}_i \right)$$

$$\left(Ax \cdot y = x \cdot A^t y = A^t y \cdot x \right)$$

Se A è simmetrico ho trovato che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = (AP)_i \qquad \text{cioè} \qquad \nabla F(P) = AP$$

(2) Supponiamo ora che $\vec{g}\ (=AP)$ sia conservativo e mostriamo che A deve essere simmetrico (sto generalizzando il caso $N=2$)

So che se $\vec{g}$ è conservativo $\Rightarrow \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni γ chiusa

Prendo $\boxed{\gamma(t) = \cos(t)\, \hat{e}_i + \sin(t)\, \hat{e}_j}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma(t)$ descrive una circonferenza di raggio $R=1$ nel piano individuato da $\hat{e}_i$ e $\hat{e}_j$, infatti

$$\|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) = \left(\cos(t)\, \hat{e}_i + \sin(t)\, \hat{e}_j\right) \cdot \left(\cos(t)\, \hat{e}_i + \sin(t)\, \hat{e}_j\right) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

(i termini misti si annullano dato che $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$, $\|e_i\|^2 = \|e_j\|^2 = 1$)

È chiaro che $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \hat{e}_i$ DUNQUE γ è chiusa

$$0 = \int_\gamma \vec{g} \cdot ds = \int_0^{2\pi} \vec{g}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} A\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} A\left(\cos t\, \hat{e}_i + \sin t\, \hat{e}_j\right)\left(-\sin t\, \hat{e}_i + \cos t\, \hat{e}_j\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{-A\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i \cos(t) \sin t}_{\text{ha integrale NULLO}} - \sin^2 t\, A\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i + \cos^2(t)\, A\hat{e}_i\, \hat{e}_j + \underbrace{\sin t \cos t\, A\hat{e}_j\, \hat{e}_j}_{\text{ha integrale NULLO}} \Big) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt\, (A\hat{e}_j)\hat{e}_i + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt\, (A\hat{e}_i)\hat{e}_j \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt}\,(A\hat{e}_i)\hat{e}_j = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt}\,(A\hat{e}_j)\hat{e}_i$$

SONO EGUALI (SI FA IL CONTO)

DUNQUE HO TROVATO CHE, se $\vec{f}$ è conservativo deve valere

$$\underbrace{(A\hat{e}_i)\cdot\hat{e}_j}_{a_{ij}} = \underbrace{(A\hat{e}_j)\cdot\hat{e}_i}_{a_{ji}}$$

A SIMMETRICA

IN DEFINITIVA

$\vec{f}(P) = AP$ è conservativo $\Longleftrightarrow$ A è simmetrico.

<u>ALTRO ESEMPIO</u>: I CAMPI RADIALI SONO CONSERVATIVI

<u>DEF.</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ω è "radiale" se vale:

se $x \in \Omega$ e se $\|y\| = \|x\| \Rightarrow y \in \Omega$

$\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ si dice radiale se Ω è radiale e se

$$\vec{f}(x) = \varphi(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|} \qquad \forall x \neq 0$$

dove φ è una funzione reale

IN ALTRI TERMINI

- $\|\vec{f}(x)\|$ dipende solo da $\|x\|$
- il verso di $\vec{f}(x)$ è $\frac{x}{\|x\|}$

Per esempio $\vec{f}(x) = x$, $\boxed{\vec{f}(x) = \frac{x}{\|x\|^\alpha}}$ ...

FATTO Se $\vec{f}$ è radiale ed è continuo (cioè φ è continua)

$\Rightarrow$ f è conservativo.

Dim Per non complicarci la vita considero

$$f(x) = \varphi(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$$

con $\varphi :]r_0, r_1[\to \mathbb{R}$ $\quad (\Omega = \{ r_0 < \|x\| < r_1 \})$

dove $0 \le r_0 < r_1 \le +\infty$

ALLORA, dato che φ è unidimensionale, $\exists\ \phi :]r_0, r_1[\to \mathbb{R}$

C^1 tale che $\phi'(r) = \varphi(r)$ $\quad \left(\phi(r) = \int_{\bar{r}}^{r} \varphi(\rho)\,d\rho \right)$

Allora $F(x) := \phi(\|x\|)$ è un potenziale per $\vec{f}$.

INFATTI $\nabla f(x) = \phi'(\|x\|)\,\nabla\|x\| = \varphi(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} = \vec{f}(x)$

$$\boxed{\text{I CAMPI RADIALI SONO CONSERVATIVI}}$$