Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 54 10/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

EQ. CALORE CON DATO DIRICHLET

$0 \le x \le L \qquad t \geq$

$u(x,t)$ = temperatura nel pto $x$ all'istante $t$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \\ u(x,0) = \bar{u}(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

($f$ è un dato - sorgente di calore)

$\bar{u}(x)$ ← assegnato $\forall x$

Cerco $\underbrace{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin(n\omega_1 x)}$ $\qquad \omega_1 = \dfrac{\pi}{L}$

⋮ CONTI VISTI

$w_n' + n^2\omega_1^2 w = f_n$ dove $f_n(t) = \underbrace{\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(n\omega_1 x)\,dx}$

$\left( f(x,t) = \sum_1^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega_1 x) \right)$

C'è una formula per $w_n$

$$w_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t}\left( w_n(0) + \int_0^t e^{n^2\omega_1^2 s} f_n(s)\,ds \right)$$

chi è $w_n(0)$ ??

RICORDO CHE HO LA CONDIZIONE $u(x,0) = \bar{u}(x) \quad 0<x<L$

Suppongo di poter sviluppo $\bar{u}$ nei seni:

$$\underbrace{\bar{u}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)} \qquad \underbrace{u_n = \frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}(x)\sin(n\omega_1 x)}$$

ALLORA

$$\sum_1^{\infty} w_n(0)\sin(n\omega_1 x) = u(x,0) = \bar{u}(x) = \sum_1^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$$

$w(t)$ per $t=0$

$\Rightarrow \quad w_n(0) = u_n \qquad$ e dunque (torno indietro)

$$w_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t}\left( u_n + \int_0^t e^{n^2\omega_1^2 s} f_n(s)\, ds\right)$$

HO TROVATO UNA $u(x,t)$ definita con questi $w_n(t)$

PER SEMPLICITÀ CONSIDERO SOLO IL CASO $f=0 \Rightarrow f_n=0$

$w_n(t) = u_n e^{-n^2\omega_1^2 t}$ da cui

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-n^2\omega_1^2 t}\sin(n\omega_1 x) =$$

$$\left( = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx \; e^{-n^2\omega_1^2 t}\sin(n\omega_1 x)\right)$$

Per scrivere questa formula basta che esistano gli $u_n$ def. da

A questo punto devo chiedermi se la $u$ scritta sopra è veramente una sol. Vedremo che c'è un problema in $t=0$ ...

FISSIAMO $\bar{t} > 0$. Allora

(1) sull'intervallo $t \in [\bar{t}, +\infty[ \qquad t \geq \bar{t}$

Dico che la serie (che definisce $u$) è unif conv. su $[0,L]\times[\bar{t},+\infty[ =: A$. Infatti:

dato $n$ $\quad M_n = \| u_n e^{-n^2\omega_1^2 t} \sin(n\omega_1 x) \|_{\infty,A} \leq |u_n| e^{-n^2\omega_1^2 \bar{t}}$

Mettiamo che $\bar{u} \in L^2 \Rightarrow \sum |u_n|^2 < +\infty \Rightarrow |u_n| \to 0 \Rightarrow$

$\exists$ costante $k : |u_n| \leq k$ DUNQUE

$$M_n \leq k\, e^{-n^2\omega_1^2 \bar{t}} \Rightarrow \sum M_n < +\infty$$

$\Rightarrow$ conv. totale $\Rightarrow$ CONV. UNIF $\Rightarrow$ $u(x,t)$ è continua su $[0,L]\times[\bar{t},+\infty[$

INOLTRE - PER LO STESSO MOTIVO - $\quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad$ se $t \geq \bar{t}$

(2) Vediamo che $u$ è derivabile in $t$ su $A$ $\;(= A(\bar{t}))$

Derivo il termine $n$ rispetto a $t$. Ottengo

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{u_n e^{-n^2\omega_1^2 t} \sin(n\omega_1 x)} = -n^2\omega_1^2 u_n e^{-n^2\omega_1^2 t} \sin(n\omega_1 x)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) \right\|_{\infty,A} \leq \text{cost.}\ \underbrace{n^2 e^{-n^2\omega_1^2 \bar{t}}}_{\text{SOMMABILE}}$$

!! (VINCE L'ESPONENZIALE)

$$\Rightarrow u \text{ è derivabile in } t \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t} = \sum \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t)$$

Questo ragionamento si può ripetere per ogni derivata successiva rispetto a $t$ perché

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u_n(x,t) = (-1)^k n^{2k} \omega_1^{2k} u_n e^{-n^2\omega_1^2 t} \sin(n\omega_1 x)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} u_n(x,t) \right\|_{\infty,A} \leq \underbrace{\text{costante}\ n^{2k} \cdot e^{-n^2\omega_1^2 \bar{t}}}_{\text{SOMMABILE}}$$

$\Rightarrow$ $u(x,t)$ è derivabile $h$ volte in $t$ e si può derivare sotto il segno di serie $\underline{\underline{\text{su } A}}$ $\forall h$

(3) Facciamo le derivate in $x$. Prendo $h$ e calcolo

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h} u_n(x,t) = u_n e^{-n^2\omega_1^2 t} \, n\omega_1^h (-1)^h \begin{cases} \text{sen} & h \text{ pari} \\ \cos & \text{dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial^h}{\partial x^h} u_n(x,t) \right\| \leq \underbrace{\text{costante } e^{-n^2\omega_1^2} n^h}_{\text{SOMMABILE}}$$

$\Rightarrow$ $u$ è derivabile in $x$ quanto voglio e si può derivare per serie SEMPRE SU $A = [0,L] \times [\bar{t}, +\infty[$

(4) Da quanto sopra ricavo che $u$ è $C^\infty(A)$ e risolve l'equazione su $A$ $\forall \bar{t} > 0$

MI CHIEDO se sia vero che $u$ è continua su $[0,L] \times [0,+\infty[$ e se valga $u(x,0) = \bar{u}(x)$ $\leftarrow$ CI VUOLE UN' IPOTESI SU $\bar{u}$

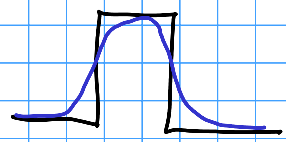
(5) Se $\boxed{\sum |u_n| < +\infty}$ ($\Rightarrow$ $\bar{u}$ è continua) allora effettivamente $u$ è continua fino a $t=0$ e vale $u(x,0) = \bar{u}(x)$

Si fa la conv. totale su $[0,L] \times [0,+\infty[$; infatti

$$\| u_n(x,t) \|_{\infty, [0,L]\times[0,+\infty[} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sommabile per ipotesi}}}{|u_n|}$$

(5 bis) Se $u$ è solo $L^2$ può dimostrare che se

$u_t(x) = u(x, t)$ allora $\| u_t - \bar{u} \|_{L^2} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$



$\bar{u}$

nel caso (I) la $u_t \xrightarrow{\text{UNIF}} \bar{u}$ per $t \to 0^+$