Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 53 09/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Data la def. di $L^2_T = \{ f \text{ T-periodica su } \mathbb{R},\ \int_0^T |f|^2 dt < +\infty \}$

si ha: $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

① Se $f \in L^2_T$ posto $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$ $\left(= \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle\right)$

allora

$$f \underset{(L^2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n \qquad e_n(t) = e^{in\omega t}$$

$$\sum_{n=-k}^{k} c_n e_n \xrightarrow{L^2} f \quad \text{per } k\to\infty$$

in altri termini

$$\int_0^T \left(f(t) - \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\omega t}\right)^2 dt \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Inoltre

$$\int_0^T |f|^2 dt = \|f\|^2_{L^2} = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (\text{PARCEVAL})$$

② Se (c_n) è una succ. (su $\mathbb{Z}$) in $\mathbb{C}$ con $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$

$\Rightarrow$ esiste $f \in L^2$ tale che $f \underset{(L_2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

e si ha $\quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\omega t} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle$

Torniamo all'equazione

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & (\text{su }]0,L[) \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx$

Avevamo visto che, se $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\omega_1 x)$, e se

$\boxed{\sum_1^{\infty} |f_n| < +\infty}$ (in part. f è continua) $\Rightarrow$

(AMMESSO CHE $\lambda - \omega_1^2 n^2 \neq 0 \ \forall n$)

posso definire $u_n := \dfrac{f_n}{\lambda - \omega_1^2 n^2}$

e allora ho $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |u_n| < +\infty$ da cui, se

definisco $y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$

y risulta C^2, è nulla in 0 e L e verifica l'equazione.

POSSO INDEBOLIRE L'IPOTESI (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ e chiedere solo

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty \quad \left(\Leftrightarrow f \in L^2(0,L)\right)$

(OSSERVO CHE (A) $\Rightarrow$ (B) infatti se $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty \Rightarrow f_n \to 0$

in particolare $\exists$ una costante K tale che $|f_n| \leq K$. Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} K|f_n| = K\sum_1^{\infty} |f_n| < +\infty$$

INVECE (B) $\not\Rightarrow$ (A), per esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$)

Posso di nuovo considerare $y(x) \underset{(?)}{=} \sum u_n \sin(n\omega_1 x)$

dove gli u_n sono gli stessi: $u_n = \dfrac{f_n}{\lambda - \omega_1^2 n^2}$. (sempre nel caso $\lambda - \omega_1^2 n^2 \neq 0 \ \forall n$)

Se gli u_n sono questi si ha $n^2 u_n = \underbrace{\dfrac{n^2}{\lambda - \omega_1^2 n^2}}_{\text{limitato}} f_n$

$n^2 |u_n| \leq K |f_n|$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |u_n|^2 < +\infty$ (qui c'era un errore)

cosa mi dice su y

NON MI DICE CHE y è C^2 (si vede)

Però mi dice che $y(x)$ è C^1 ($\Rightarrow$ è continua e nulla al bordo)

INFATTI
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(n^2|u_n|\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2} + n^4|u_n|^2}_{+\infty}\Big)$$

DUNQUE $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$ da cui y è C^1 (e nulla al bordo)

POSSO ALLORA CONSIDERARE y come "soluzione generalizzata" dell'equazione

Def. (derivata in senso L^2). Siano $f, g : A \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ due funzioni misurabili. Dico che f è derivabile in senso di L^2 e che $g' \underset{L^2}{=} f$ SE

($f \in L^2$), $\exists f_n$ C^1 tali che

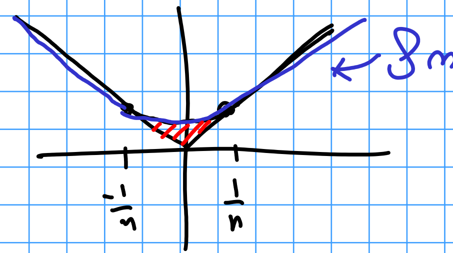
$f_n \xrightarrow{L^2} f$, $f_n' \xrightarrow{L^2} g$

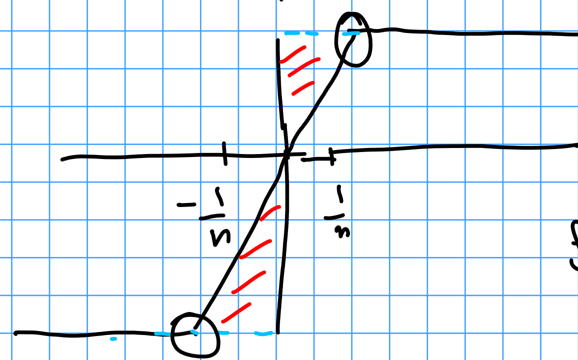
Per esempio $f(x) = |x|$ ammette $g(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

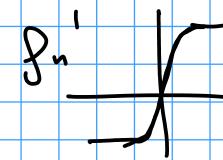
come derivata in senso L^2 (NON MI INTERESSA $g(0)$)

Infatti posso prendere f_n

come in quella lezione fa







$f_n'(t) = nt$
$-\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}$

Se faccio $\|f_n - f\|_{L^2} \to 0$ $\quad n \to \infty$ (si vede, ovvero già vist

che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$)

Se poi considero $\|f_n' - g\|_2^2 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (nt - \operatorname{sgn}(t))^2 \, dt =$

$$2\int_0^{1/n} (nt-1)^2 \, dt = 2\int_0^{1/n} (n^2t^2 - 2nt + 1) \, dt =$$

$$2\left[\frac{n^2t^3}{3} - nt^2 + t\right]_0^{1/n} = 2\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

DUNQUE TORNA: la funzione $f(x) = |x|$ è L^2-derivabile

e $f' \underset{L^2}{=} \operatorname{sgn}$

ESEMPIO (NEGATIVO) $\quad H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

NON HA DERIVATA IN SENSO DI L^2

FATTO $\boxed{\text{Se } f \text{ ha derivata in senso } L^2 \Rightarrow f \text{ è continua}}$

Supponiamo infatti che $\exists\, f_n$ C^1 tali che

$$\underbrace{f_n \xrightarrow{L^2} f \quad \text{e} \quad f_n' \xrightarrow{L^2} g \ (\underset{L^2}{=} f')}$$

(MI RENDO CONTO CHE È LUNGO ... ~~LASCIO STARE~~)

Se f_n sono L_T posso usare Fourier:

Vediamo che relazione c'è tra i coeff di f_n' e quelli di f_n.
FISSO f_n — LA CHIAMO g.

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^T g'(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\frac{1}{T}\Big[g(t)\, e^{-in\omega t} \Big]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T g(t)(-in\omega)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

fa zero perché f_n è continua e T periodica. Lo stesso è vero per $e^{-in\omega t}$

$$= \frac{in\omega}{T}\int_0^T g(t)\, e^{-in\omega t} =$$

$$in\omega\, c_n$$

IN SOSTANZA se ho una singola funzione g di classe C^1
se c_n sono i coeff. di g e d_n sono i coeff di g'

$$\Longrightarrow \boxed{d_n = in\omega\, c_n}$$

Adesso torniamo al caso in cui ho f_n C^1 tali che

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \ (\in L^2) \qquad \text{e} \qquad f_n' \xrightarrow{L^2} g \ (\in L^2,\ g \overset{L^2}{=} f')$$

Da quanto visto sulle serie di F. in L^2 si ha che

f_n ha dei coeff. $(c_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, $\quad c_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} c_k$ di f

f_n' ha dei coeff $(d_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ $\quad d_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} d_k$ di g

da tutto questo ricavo che $d_{n,k} = ik\omega\, c_{n,k}$ e se
$n\to\infty$ che $\boxed{d_k = ik\omega\, c_k}$ ← !!

so che $\sum |a_k|^2 < +\infty \Rightarrow \sum k^2 c_k^2 < +\infty$

$$\Rightarrow \sum |c_k| = \sum \frac{1}{k}\left(k\,|c_k|\right) \leq \sum \frac{1}{k^2} + k^2|c_k|^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum |c_k| < +\infty \Rightarrow f \text{ è CONTINUA}$$

ANALOGAMENTE POSSO DEFINIRE DERIVATA K-ESIMA IN SENSO L^2 di f:

deve esistere una successione (f_n) di classe C^k tali che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e $f^{(h)} \xrightarrow{L^2} g_h$ $h = 1 \dots k$

Se questo avviene g_h è la L^2 derivata h-esima di f che posso indicare con $f^{(h)}$

$$\Longleftrightarrow \quad f^{(h)} \underset{L^2}{=} f^{(h-1)}{}'$$

OSS. Se f è $C^1 \Rightarrow f$ è L^2 derivabile e f' coincide con la derivata in senso L^2

OSS SI DEVE DIMOSTRARE (ed è vero) che se f ha derivata L^2, questa derivata è unica (in senso L^2 - dunque a meno di q.o.)

FATTO Se f ha derivata k-esima in senso $L^2 \Rightarrow f$ è C^{k-1}

DUNQUE con queste definizioni ha senso cercare di risolvere il problema

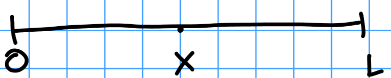
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{in senso } L^2$$

QUESTO È ESATTAMENTE CIÒ CHE SI FA se si risolve per serie come nelle lezioni precedenti quando $f \in L^2$

ESEMPIO (INTERESSANTE): EQUAZIONE DEL CALORE

IMMAGINIAMO UNA "SBARRA" DI LUNGHEZZA L

x indica la posizione



In ogni punto x c'è una temperatura $u_0(x)$

voglio vedere come si evolve nel tempo (che chiamo t) tale temperatura — rispettando la legge della conduzione del calore (che non scrivo)

Dunque l'incognita è una funzione $u(x,t)$

SI ARRIVA ALLA SEGUENTE EQUAZIONE (alle der. parziali)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \overset{c=1}{c}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

f è una sorgente esterna di calore

A QUESTA EQ. DEVO AGGIUNGERE:

- UNA CONDIZIONE INIZIALE IN $t=0$

  $u(x,0) = u_0(x)$ (u_0 è assegnata)

- UNA CONDIZIONE IN $x=0$ / $x=L$ ← CI POSSONO ESSERE VARI TIPI DI CONDIZIONE

(a) CONDIZIONE DI DIRICHLET - DATO NULLO AL BORDO - CIOÈ

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t>0$$

(b) CONDIZIONE DI NEUMANN

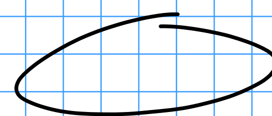
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad \forall t>0$$

il calore non esce / non entra

(c) CONDIZIONE PERIODICA (LA SBARRA è UN ANELLO

$$u(0,t) = u(L,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}(L,t)$$



VEDIAMO IL CASO (A): IDEA è di cercare

$$(*) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin(n\omega_1 x)$$

(se blocco $t>0$ scrivo lo sviluppo di $u(x,t)$ nei seni)

(e porrei $w_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin(n\omega_1 x)\,dx$)

FACCIAMO FINTA CHE TUTTO TORNI e deriviamo (*) in t o in x due volte

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n'(t) \sin(n\omega_1 x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\left(-n^2\omega_1^2\right)\sin(n\omega_1 x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(w_n'(t) + n^2 \omega_1^2 w_n(t) \right) \sin(n \omega_1 x)$$

Se c'è f posso suppore $f(t,x) = \sum f_n(t) \sin(n\omega_1 x)$

dove $f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(t,x) \sin(n\omega_1 x)$

e dunque l'equazione diventa

$$w_n' + n^2 \omega_1^2 w_n = f_n \qquad \text{(tutto dipende da } t\text{)}$$

è un'equazione ordinaria per ogni $n \geq 1$ di ordine 1

per cui ho una formula:

$$w_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t} \left(w_n(0) + \int_0^t e^{n^2 \omega_1^2 s} f_n(s)\, ds \right)$$

Se $f = 0 \Rightarrow f_n = 0 \Rightarrow w_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t} w_n(0)$

FINIAMO DOMANI