Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 52 08/04/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

FUNZIONI A "ENERGIA FINITA"

($f: A \to \mathbb{R}$ / $A \to \mathbb{C}$) A misurabile

Def. Dico che f è "a quadrato sommabile" se

f è misurabile e $|f|^2$ è integrabile

Di solito si chiama "energia di f" l'integrale $\int_A |f(x)|^2 dx$

Si indica con $\mathcal{L}^2(A)$ l'insieme delle funzioni con energia finita / a quadrato sommabile

È utile introdurre una "relazione di equivalenza" tra le funzioni di $\mathcal{L}^2(A)$ dicendo che

$$f \simeq g \quad \text{se} \quad f(x) = g(x) \quad \text{per q.o. } x$$

Per esempio la funzione nulla $f(x)=0$ e la funzione di Dirichlet $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

allora $f \simeq g$ perché $\mathbb{Q}$ è trascurabile in $\mathbb{R}$

($\mathbb{Q}$ è numerabile)

Data questa relazione di equivalenza definisco

$L^2(A) = \{ f \in \mathcal{L}^2(A)$ "dove le funzioni equivalenti sono considerate uguali" $\}$

questo è lo spazio di funzioni che mi serve

PROPRIETÀ In $L^2(A)$ è definito un prodotto scalare

Date $f, g \in L^2(A)$ pongo

$$\langle f, g \rangle := \int_A f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

(se sono a valori reali il coniugato non c'è)

(NOTA che $\langle f, g \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle$ se $f \simeq f_1$ e $g \simeq g_1$

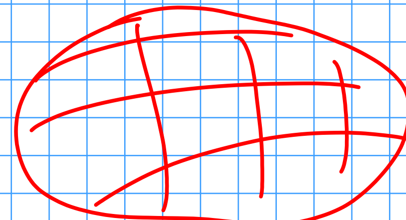
ANALOGIA: se definisco $\mathbb{Q}$ posso considerare

$Z = \{ (n, m) : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \}$ e introduco la relazione di equivalenza $(n, m) \simeq (n_1, m_1) \iff$

$$n\, m_1 = n_1\, m$$

Allora $\mathbb{Q} = Z/\sim$

Z



$\frac{1}{3} = \{ (1,3), (2,6), (3,9) \ldots, (-1,-3), \}$

Quello sopra è effettivamente un prodotto scalare. INFATTI

- $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ è lineare in f.

$$\langle f, g \rangle = \int f\, g$$

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

qui mi serve la def. di L^2

- $\langle f, f \rangle \geq 0$ e vale zero $\iff f = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\int_A |f|^2 \, dx = 0 \iff f = 0 \text{ q.o.}$$

ALLORA POSSO DEFINIRE LA NORMA 2

$$\| f \|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_A |f|^2(x) \, dx}$$

e di conseguenza la nozione di limite / serie ...

<u>ESEMPIO</u> $\quad f_n(x) = \dfrac{n^\alpha}{1 + n^2 x^2} \quad (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \quad (\alpha > 0 \text{ FISSATO})$

è una successione di funzioni. Vediamo se $f_n \in L^2(\mathbb{R})$

Devo fare $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n^\alpha}{1 + n^2 x^2} \right)^2 dx \quad \left(= \| f_n \|_2^2 \right)$

Posso sostituire $\quad nx = y \iff n\,dx = dy \qquad dx = \dfrac{dy}{n}$

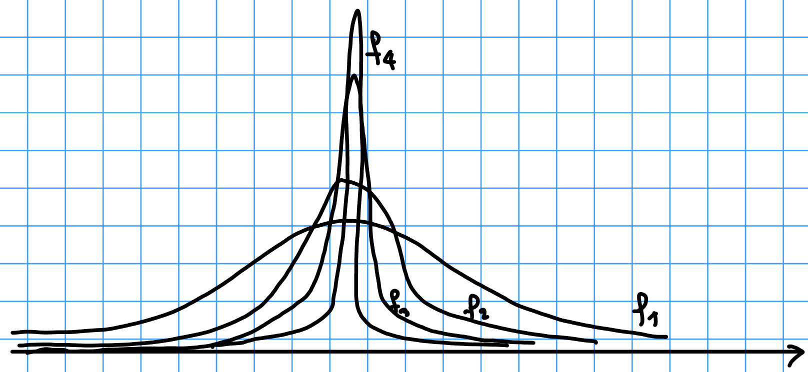
$$\Rightarrow \text{trovo} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^{2\alpha}}{(1 + y^2)^2} \frac{1}{n} \, dy = n^{2\alpha - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^2} < +\infty$$

Dunque $\forall n \quad f_n \in L^2$. Se $\alpha < \dfrac{1}{2}$ si ha che

$$f_n \xrightarrow{L^2} 0 \qquad \text{perché} \qquad \| f_n \|_2^2 = n^{2\alpha - 1} \text{cost} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Osservo che, se per esempio $\alpha = \dfrac{1}{4}$

$$f_n(x) = \frac{n^{1/4}}{1 + n^2 x^2} \quad \text{e} \quad f_n(0) = n^{1/4} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$



IN QUESTO CASO $\|f_n\|_\infty \to +\infty$, $\|f_n\|_2 \to 0$

IL PRODOTTO SCALARE MI DÀ UNA NOZIONE DI ORTOGONALITÀ IN $L^2(A)$:

f è ortogonale a g se $\langle f, g\rangle = 0$

Consideriamo $L^2_T(\mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, $f \in L^2([0,T])\}$

$L^2_T(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, $f \in L^2([0,T])\}$

e analogamente considero $\|f\|_2 = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

ritrovo il prodotto scalare e la norma 2 su L^2_T

VEDIAMO CHE le funzioni $e_n(t) := e^{i\omega n t}$ sono ortogonali: $\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^T e_n(t)\overline{e_m(t)}\, dt =$

$$\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}$$

$\Rightarrow \|e_n\|_2 = \sqrt{T}$

dunque $\frac{1}{\sqrt{T}} e_n$ è un "sistema ortonormale" in L^2_T

DOMANDA: dato $f \in L^2$ posso scrivere $f \overset{(?)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$

IN ALTRI TERMINI il "sistema" $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ è una "base" $\Leftrightarrow$ $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ è completo !!

Vediamo come si affronta questo problema.

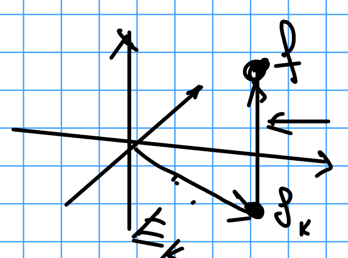
Dato $K \in \mathbb{N}$ considero

$$E_K = \left\{ \sum_{n=-K}^{K} \lambda_n e_n \quad \lambda_n \in \mathbb{C} \right\}$$ ← combinazioni lineari finite, con n tra $-K$ e K

$E_K \subset L^2_T$, ed è un sottospazio lineare (di dim $2K+1$)
(perché $e_{-K} \dots e_0 \dots e_K$ sono ortogonali $\Rightarrow$ lin. indip.)

Data una $f \in L^2$ voglio trovare la "proiezione" di f su E_K, cioè la funzione $f_K \in E_K$ tale che

$$\| f - g \| \geq \| f - f_K \| \quad \forall g \in E_K$$



Dico che $f_K = \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n$ dove $c_n = \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int f \bar{e}_n$

Infatti: • $f_K \in E_K$

• $\langle f - f_K, g \rangle \quad \forall g \in E_K$. Prendo $g = e_i$, i tra $-K$ e K

$$\langle f - \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n, e_i \rangle = \langle f, e_i \rangle - \sum_{n=-K}^{K} c_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{T \delta_{n,i}}$$

$$= \langle f, e_i \rangle - \langle c_i e_i, e_i \rangle = \langle f, e_i \rangle - c_i T = 0$$

per definizione di c_i

DUNQUE $f - f_K$ è ortogonale a ogni e_i i tra $-K$ e K

$\Rightarrow$ $f - f_K$ è ortogonale a ogni $g \in E_K$

$$f - f_K \perp E_K$$

$g \in E_K$

• $\forall \|f - g\|^2 = \|f - f_K + f_K - g\|^2 = \|f - f_K\|^2 +$

$$\underbrace{2 \langle f - f_K , \overbrace{f_K - g}^{\in E_K} \rangle}_{=0} + \|f_K - g\|^2$$

$\Rightarrow$ $\|f - g\|^2 = \|f - f_K\|^2 + \|f_K - g\|^2 \geq \|f - f_K\|^2 \quad \forall g \in E_K$

da cui f_K è l'elemento di E_K di minima distanza

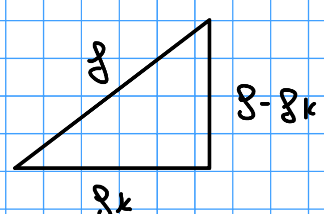
• IN PARTICOLARE se $g = 0$

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_K + f_K\|_2^2 = \|f - f_K\|_2^2 + 2 \underbrace{\langle f - f_K , f_K \rangle}_{0} + \|f_K\|_2^2$$

$(\Rightarrow \|f_K\| \leq$

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_K\|^2 + \|f_K\|^2$$

distanza da f



$$\|f - f_K\|^2 = \|f\|^2 - \|f_K\|^2$$

• Vediamo quanto fa $\|f_K\|^2 =$

$$\langle \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n , \sum_{m=-K}^{K} c_m e_m \rangle = \sum_{n,m=-K}^{K} \overbrace{c_n \overline{c_m} \langle e_n , e_m \rangle}^{\langle c_n e_n , c_m e_m \rangle} =$$

$$\sum_{n,m=-K}^{K} c_n \overline{c_m} \, T \, \delta_{nm} = \sum_{n=-K}^{K} c_n \overline{c_n} \, T = T \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2$$

dunque $\quad \|f_K\|^2 = T \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2 \quad$, che messo nella

formula precedente dice

$$(P) \qquad \|f\|_2^2 = \|f - f_K\|_2^2 + T \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geq T \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

Dunque se $f \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty \quad \left(\leq \frac{1}{T} \|f\|_2^2 \right)$

Da (P) ottengo anche che

$$f_K \xrightarrow{L^2} f \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{T} \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2}_{\text{Eguaglio di Parceval}}$$

In altri termini:

VALE PARCEVAL $\quad \Leftrightarrow \quad f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

INTENDO che $\displaystyle\sum_{n=-K}^{K} c_n e_n \xrightarrow{L^2} f$

per $K \to \infty$

e cioè $\quad \displaystyle\int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega t} \right|^2 \xrightarrow{K \to \infty} 0$

IN EFFETTI SI DIMOSTRA CHE per OGNI $f \in L^2$

VALE PARCEVAL : $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

dove $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$

e dunque $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}$

VICEVERSA se (c_n) è una successione di numeri complessi

tali che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, allora esiste unica $f \in L^2_T(\mathbb{C})$

per cui $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}$. Inoltre vale

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}$$

f è quadrato sommabile $\longleftrightarrow$ (c_n) è quadrato sommabile

DISCORSI ANALOGHI PER IL CASO REALE

(1) Se $f \in L^2_T(\mathbb{R})$ definiti a_n e b_n come al solito

si ha $f(t) \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Inoltre vale Parceval (reale)

CONVERGENTE

$$\|f\|_2^2 \left(= \int_0^T f(t)^2\, dt\right) = T a_0 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(2) Se a_n, b_n sono tali che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty$

allora esiste $f \in L^2$ per cui vale (1) con questi a_n e b_n ...

OSS. La convergenza L^2 $\left(f_n \xrightarrow{2} f\right)$ NON IMPLICA NEANCHE CHE

$f_n(x) \to f(x)$ per quasi ogni x. PERÒ SI DIMOSTRA

che $\exists\, n_k$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.o. x

"ESEMPIO" Se torno all'eq diff. con dati al bordo

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

Avevamo detto che dove $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$

almeno nel caso in cui $f = \sum f_n \sin(n\omega_1 x)$ con $\sum |f_n| < +\infty$

$$u_n = \frac{f_n}{\lambda - n^2\omega_1^2} \qquad \left(\text{se } \lambda - n^2\omega_1^2 \neq 0 \ \forall n\right)$$

Se prendo $f \in L^2(0,L)$ posso considerare gli u_n derivanti dalla formula sopra. Questi u_n hanno la proprietà

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty \qquad \left(\text{perché } \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty\right)$$

NON MI DÀ y di classe C^2 !! Però posso a dimostrare da $\sum |u_n| < +\infty \Rightarrow g$ è C^0 e vale zero al bordo

OTTENGO UNA NOZIONE "GENERALIZZATA" DI SOLUZIONE

LO FINIAMO DOMANI