Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 27/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Torniamo all'esempio di ieri $\qquad L>0$

$$\begin{cases} a\,y'' + b\,y = f(x) & 0<x<L \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases} \qquad \text{(ieri } f=0)$$

CONVIENE DIVIDERE PER a e ridistribuire

$$(P)\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x) \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \qquad (f \text{ è } f/a)$$

dove dunque $L>0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $\qquad \left(\omega_1 := \frac{\pi}{L}\right)$

Come detto ieri cerco soluzioni del tipo $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$

Suppongo di poter derivare sotto il segno di serie:

$$y'' + \lambda y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-(n\omega_1)^2 + \lambda\right) u_n \sin(n\omega_1 x)$$

che deve fare $f(x)$. Posso sviluppare f nei seni e scrivere

$$f(x) \overset{!!}{=} \sum_{1}^{\infty} f_n \sin(n\omega_1 x) \qquad \text{dove } f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx$$

Se faccio così trovo le condizioni (sufficienti — MA SI DIMOSTRA ANCHE NEC.)

$$u_n \left(\lambda - (n \underset{\frac{\pi}{L}}{\omega_1})^2 \right) = f_n \qquad \forall n \geq 1$$

DUE CASI

(1) ($\lambda - (n\omega_1)^2 \neq 0 \quad \forall n$, cioè che $\dfrac{\lambda}{\omega_1^2} \neq n^2 \quad \forall n \geq 1$

(se $\lambda \leq 0$ lo caso è vero ??)

In questo caso posso ricavare $\boxed{u_n = \dfrac{f_n}{\lambda - n^2 \omega_1^2}} =$

A questo punto mi chiedo se con questi u_n posso fare i passaggi che ho dato per buoni.

Supponiamo che gli f_n siano assolutamente sommabili

$$\sum_1^\infty |f_n| < +\infty$$

(questa è un'ipotesi su f — un po' indiretta è più della continuità — si può dim. che basta $f \in C^1$)

INOLTRE QUESTA IPOTESI IMPLICA $f(0) = f(L) = 0$

Allora u_n definiti sopra hanno la prop.

$$\sum n^2 |u_n| < +\infty \qquad \text{in fatti}$$

$$n^2 |u_n| = \underbrace{\frac{n^2}{|\lambda - \omega_1^2 n^2|}}_{\text{limitato}} |f_n| \leq \text{costante } |f_n|$$

$\Rightarrow u(x) = \sum_1^\infty u_n \sin(n\omega_1 x)$ è di classe C^2 e si può derivare per serie e dunque posso tornare indietro

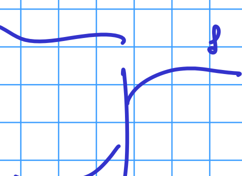
(se $\sum_1^\infty n^k |u_n| < +\infty \Rightarrow u(x) = \sum^\infty u_n \sin(n\omega_1 x)$ è C^k ...)

e trovo u soluzione dell'equazione.

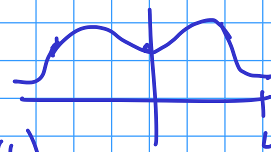
INOLTRE, da $\sum^\infty n^2 |u_n| < +\infty$ segue che

$$\boxed{u(0) = u(L) =} \; u''(0) = u''(L) = 0$$

$$\sum^\infty n^2 |f_n| < +\infty \Rightarrow \tilde{f} \text{ è } C^2$$



$\tilde{f}'$ è pari e $2L$ periodica continua



$\tilde{f}'$

NESSUNA PROPRIETÀ LEGA $f'(0)$ e $f'(L)$

TUTTO QUESTO NEL CASO $\boxed{\lambda - m^2\omega_1^2 \neq 0}$ $\forall m \geq 1$

DUNQUE IN QUESTA IPOTESI

IL PROBLEMA (P) (con dati al bordo) ha UNA E UNA SOLA SOLUZIONE PER OGNI DATO f.

(f in quella "classe...") e la sol u ha u e u^{4} nella stessa "classe"

② CASO $\exists\, m_0$ tale che $\lambda - m_0^2\omega_1^2 = 0$, cioè che $\frac{\lambda}{\omega_1^2}$ sia quadrato di un intero ≥ 1 (DUNQUE $\lambda > 0$)

ALLORA TORNIAMO ALLA CONDIZIONE SU u_m

$$u_m\left(\lambda - (m\omega_1)^2\right) = f_m \qquad \forall m \geq 1$$

se metto $m = m_0$ trovo $\boxed{f_{m_0} = 0}$

QUESTA è UNA CONDIZIONE NECESSARIA (su f) perché esista u

Se $f_{m_0} = 0$ allora posso prendere u_{m_0} in modo arbitrario.

Per gli $n \neq m_0$ posso dividere e ritrovare la formula di prima

$$u_n = \frac{f_n}{\lambda - \omega_1^2 n^2} \qquad n \geq 1,\ n \neq n_0$$

e ragionando come prima (se $\sum |f_n| < +\infty$) trovo che

$$y = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda - \omega_1^2 n^2} \sin(n \omega_1 x) + \underset{a_{n_0}}{\alpha} \sin(n_0 \omega_1 x)$$

è soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

DUNQUE IN QUESTO SECONDO CASO

la sol. y ESISTE SOLO SE $g_{n_0} = \int g(x) \sin(n_0 \omega_1 x) dx =$

e se esiste NON È UNICA

ANALOGIA

IN $\mathbb{R}^N$ voglio risolvere il sistema

(S) $Ax = b$ A $N \times N$ simmetrica $b \in \mathbb{R}^N$

- se $\det A \neq 0$ il sistema ha sol. $\forall b$

- se $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ $\ker A \neq \{0\}$

allora (S) ha sol $\Leftrightarrow$ b ortogonale a $\ker A$ (??) ←

e se (S) ha sol. y sicuramente $y + y_0$ è

ancora sol $\forall y_0 \in \ker A$

se $Ax = b$ e $y \perp \ker A$

$(Ax \cdot y) = b \cdot y$

$(x \cdot Ay) = 0$