Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 26/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

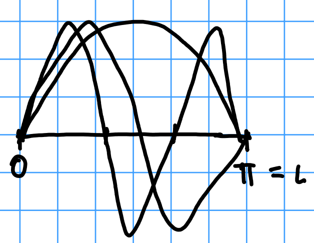
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Soli seni / soli coseni

Riepilogo: Dato $L>0$ e data $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ (regolare quanto serve) sono definiti i coefficienti:

$$u_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx \qquad \text{dove} \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{L}$$

e considero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x) =: S(x)$




$\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$ ...

Allora (1) se $f$ è regolare a tratti in $[0,L]$ si ha

$\forall x\in[0,L]$ $\quad S(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ . $\quad \boxed{S(0)=S(L)=0}$

Dati $(u_n)$

(2) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k |u_n| < +\infty$ allora la serie delle derivate fino all'ordine $k$ è unif. conv. $\Rightarrow$ $S$ è $C^k$ e le sue derivate

0, 1, . . . , k coincidono con la serie delle derivate . Inoltre

se $h \in (0 \ldots k)$ $h$ è pari $\Rightarrow$ $S^{(h)}(0) = S^{(h)}(L) = 0$

(tutte le derivate pari - compresa la funzione - si annullano agli estremi)

Inoltre $$\frac{2}{L}\int_0^L S(x)\sin(n\omega_1 x) = u_n$$

Per esempio se prendo $u_n = \frac{1}{n^3}$ posso considerare

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\sin(nx) \qquad (L = \pi)$$

Per quanto detto sopra $S$ è di classe $C^1$.

$S(0) = S(\pi) = 0$ . $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx)$

(e $S'$ è continua) .

<u>ANALOGAMENTE</u> posso considerare i coefficienti

$$v_n := \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega_1 x)\,dx \qquad \left(\omega_1 = \frac{\pi}{L}\right)$$

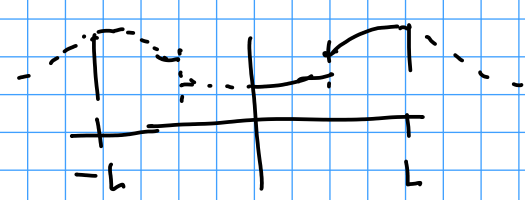
$v_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dt$

(coefficienti in "soli coseni") . Si ha che

(1) Se $f$ è regolare a tratti si ha

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum v_n \cos(nx) \qquad 0 < x < L$$

$$\left.\begin{matrix} f(0) & \text{se } x = 0 \\ f(L) & \text{se } x = L \end{matrix}\right\}$$



Dati dei $(v_n)$

(2) $\forall$ se $\sum_{n=0}^{\infty} n^k |v_n| < +\infty$ allora posto $S(x) := \sum_0^{\infty} v_n \cos(n\omega_1 x)$

$\Rightarrow S \in C^k$, $S^{(h)}(x) = \sum$ derivate $h$-esime, $h = 0 \ldots k$, tutte le serie delle derivate (fino alla $k$-esima) convergono unif.

$f^{(h)}(0) = f^{(h)}(L) = 0$ se $h$ è dispari $(h \le k)$

Inoltre se faccio $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega_1 x)\,dx$ ritrovo $v_n$

---

<u>ESEMPI</u> $f(x) = 1$ $\qquad L = \pi \quad (\omega_1 = 1)$

Cerco gli sviluppi nei seni di $nx$ e nei coseni di $nx$

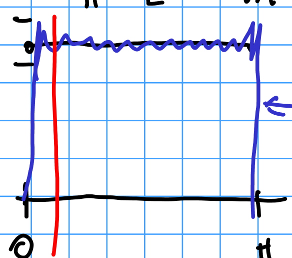
Dalle formule viste ho

$$(n \geq 1) \quad u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

↑

BRUTTINO...




← somma parziale della serie $\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ DISPARI}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nx)$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)}$$

IN QUESTO CASO $\sum |u_n| = +\infty$ (in effetti anche se $f$ è continua NON SI ANNULLA IN $0$ e $\pi$)

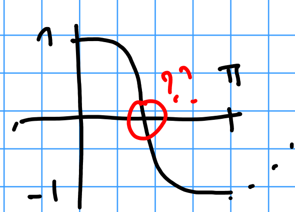
Vediamo lo sviluppo della stessa funzione rispetto ai coseni.

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1\,dx = 1$$

$$\text{se } n \geq 1 \qquad v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = 0$$

Lo sviluppo è BANALE $\quad f(x) = v_0$

ALTRO ESEMPIO



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ VOGLIO $f'(0) = 0$ $f'(\pi) = 0$

$\boxed{c = 0}$ $3a\pi^2 + 2b\pi = 0$

IMPONGO $f(0) = 1$ $f(\pi) = -1$ $a + b + d = 1$

$a\pi^3 + b\pi^2 + d = -1$

$$\begin{cases} 3a\pi^2 + 2b\pi = 0 \\ d = 1 \\ a\pi^3 + b\pi^2 + d = -1 \end{cases}$$

$\boxed{b = -\frac{3a\pi}{2}} = -\frac{6}{\pi^2}$

$\boxed{d = 1}$

$a\underbrace{\left(\pi^3 - \frac{3}{2}\pi^3\right)}_{-\frac{\pi^3}{2}} + 1 = -1$

$\boxed{a = \frac{4}{\pi^3}}$

$\boxed{f(x) = \frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{6}{\pi^2}x^2 + 1}$ $\left(f(\pi) = 4 - 6 + 1 = -1\right)$

$\left(f'(x) = \frac{12}{\pi^3}x^2 - \frac{12}{\pi^2}x\right.$ $f_0$ zero in $x = 0$ e $x = \pi$ TORNA)

Cerco gli sviluppi nei seni / nei coseni

Nei seni $u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx =$ (per parti)

$\frac{2}{\pi}\left[f(x)\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(x)\cos(nx)\,dx =$

$-\frac{2}{\pi n}\Big(\underbrace{(-1)\cos(n\pi)}_{-(-1)^n} - 1\Big) + \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{\substack{=0 \\ f'(0)=f'(\pi)=0}} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi f''\sin(nx)dx$

$$\frac{2(1+(-1)^n)}{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\left[ f''(x)\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n^3\pi}\int_0^\pi f'''(x)\cos(nx)\,dx$$

$$\frac{2(1+(-1)^n)}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi}\left(\frac{12}{\pi^2}(-1)^n + \frac{12}{\pi^2}\right) - \underbrace{\frac{2}{n^4\pi}\left[\frac{24}{\pi^3}\sin(nx)\right]_0^\pi}_{=0}$$

$$f''(x) = \frac{24}{\pi^3}x - \frac{12}{\pi^2} \qquad f''(\pi) = \frac{24}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2} = \frac{12}{\pi^2}, \quad f(0) = -\frac{12}{\pi^2}$$

DUNQUE
$$u_n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{n} + \frac{48}{\pi^3 n^3} & n \text{ pari} \end{cases}$$

COMUNQUE $\sum |u_n| = +\infty$ a causa di $\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}$ IN EFFETTI $f(0) \neq 0$, $f(\pi) \neq 0$

Vediamo lo sviluppo nei coseni

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{6}{\pi^2}x^2 + 1\right)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{4}\frac{1}{\pi^3}\pi^4 - \frac{6}{3}\frac{1}{\pi^2}\pi^3 + \pi\right) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2\pi + \pi) = 0$$

Se $n \geq 1$ $\quad v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx =$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\,dx =$$

sono nulli in $0/\pi$

$$\underbrace{-\frac{2}{n\pi}\left[f'(x)\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi f''(x)\cos(nx)\,dx =$$

$=0$ in $x=0$ / $x=\pi$

$$-\frac{2}{n^2\pi}\underbrace{\left[ f''(x)\,\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{n^3\pi}\int_0^\pi f'''(x)\sin(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{n^3\pi}\left[\frac{24}{\pi^3}\,\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi = -\frac{48}{n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right) = \frac{48}{\pi^4 n^4}\left(1-(-1)^n\right)$$

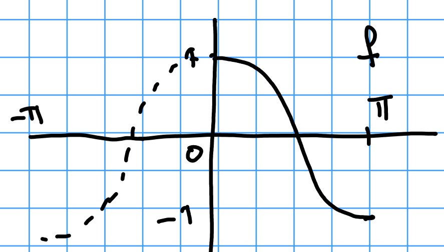
$$= \begin{cases} \dfrac{96}{\pi^4 n^4} & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

<u>DUNQUE</u> la $f$ da cui sono partito è $C^2$ e

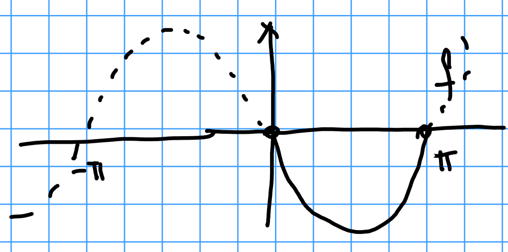
$$f'(0) = f'(\pi) = 0 \,.$$

??

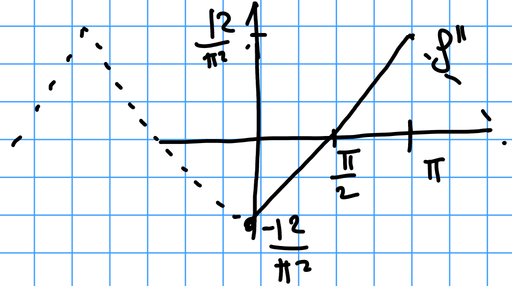
Quello che è vero è che la $\tilde{f}$ definita in modo pari su $[-\pi,\pi]$ e poi periodicizzata di periodo $2\pi$ risulta di classe $C^2$



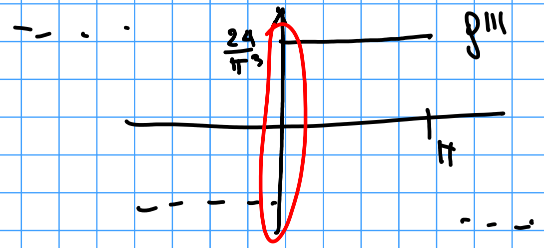

$$\frac{4}{\pi^3}x^3 - \frac{6}{\pi^2}x^2 + 1$$




$$\frac{12}{\pi^3}x^2 - \frac{12}{\pi^2}x$$




$$\frac{24x}{\pi^3} - \frac{12}{\pi^2}$$





$$\frac{24}{\pi^3}$$

$$\sum \frac{n^3}{n^4} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

PROBLEMA (MOLTO SEMPLICE)

Considero l'intervallo $[0,L]$ e cerco le soluzioni dell'eq. diff.

$$\begin{cases} a y'' + b y = 0 \;/\; f(x) & a \neq 0 \\ \boxed{y(0) = y(L) = 0} \end{cases}$$

È un'eq. lineare, del II° ordine, (in forma normale), a coeff. costanti

NON È UN PROBLEMA DI CAUCHY
(è un problema con "DATI AL CONTORNO")

Un approccio possibile (SHOOTING)

FISSO le condizioni $y(0)=0$ $y'(0) = m$ ($m$ parametro)
trovo la soluzione con i metodi noti

Se per esempio $a=1$ $b=1$ si ha la sol. generale

è $y(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=m$

ho $\beta = 0$ e $m = \alpha$

DUNQUE $y(x) = m \sin(x)$. Metto $x = L$

$m \sin(L) = 0$ $\Big\langle$ se $\sin(L)=0$ vanno bene tutti gli $m$; se $\sin(L)=0$ l'unica sol è $y(x)=0$

L'esistenza di sol. non nulle è legata ai coeff. $a, b$ e a $L$

Voglio un'altro punto di vista (che mi fa capire meglio la natura del problema)

CERCO $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_1 x)$ $\qquad \omega_1=\frac{\pi}{L}$

"Se va tutto bene" $\qquad y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_1)\cos(n\omega_1 x)$

$$y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)(n\omega_1)^2\sin(n\omega_1 x)$$

Se impongo l'equazione devo

$$a y''+by=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-a(n\omega_1)^2+b\right)\sin(n\omega_1 x) \Bigg\} \text{ Deve fare zero!!}$$

TROVO LA condizione $\boxed{a_n\left(b-a(n\omega_1)^2\right)=0 \quad \forall n\geq 1}$ ⊗

(è sufficiente - ma si può dimostrare che è anche necessario)

CI SONO DUE CASI

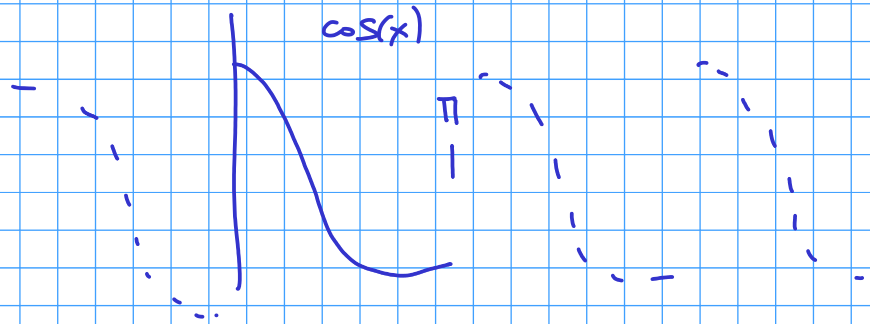
1. $\forall n\geq$ $\quad a\omega_1^2 n^2-b\neq 0$. In questo caso gli unici $a_n$ sono $\boxed{a_n=0 \quad \forall n}$

2. $\exists\, n_0 : \; b-a n_0^2\omega_1^2=0 \iff \frac{b}{a\omega_1^2}=n_0^2$

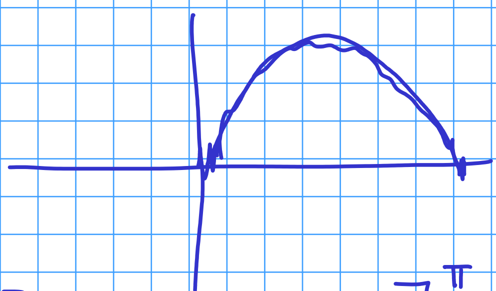
$$\boxed{\frac{bL^2}{a\pi^2}=n_0^2}$$

In questo caso ci sono delle soluzioni del tipo

$$y(x)=\alpha\sin(n_0 x) \qquad \left(\begin{array}{l} a_n=0 \text{ se } n\neq n_0 \\ a_n=\alpha \text{ arbitrario se } n=n_0 \end{array}\right)$$




$$f(x) = \cos(x)$$



$$u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\Big[\sin(x)\sin(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} n\sin(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2n}{\pi}\Big[-\cos(x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,(-n)\sin(nx)\,dx = =$$

$$\frac{2n}{\pi}\left((-1)^n+1\right) - n^2 u_n \iff (1+n^2)u_n = \frac{2n}{\pi}$$

$$u_n = \frac{2}{\pi}\frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}$$ NON È SOMMABILE

cos(x) NON FA ZERO IN $0, \pi$