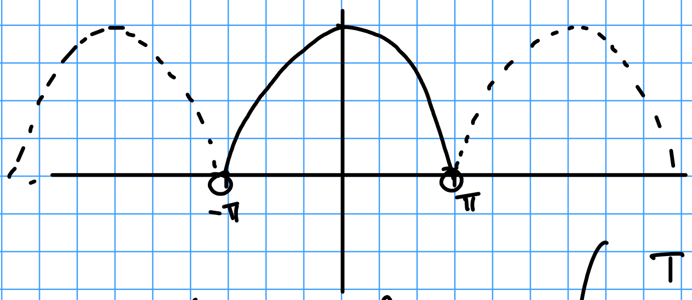
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49 25/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f(t) = -(t-\pi)(t+\pi) = \pi^2 - t^2$



Cerco i coeff di F. di f. CASO COMPLESSO $\left(\begin{array}{l} T = 2\pi \\ \omega = 1 \end{array} \right)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

Visto che $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\, dt \; \ldots = \frac{2}{3}\pi^2$

$n \neq 0$

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{(\pi^2 - t^2)} e^{-int}\, dt \overset{\text{per parti}}{=} \underbrace{\left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$+ \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt \qquad = \frac{\overset{0}{f(\pi)}\, \overset{(-1)^n}{e^{-in\pi}} - \overset{0}{f(-\pi)}\, \overset{(-1)^n}{e^{in\pi}}}{-in}$$

$$+ \frac{1}{in} \left[f'(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(in)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\, e^{-int}\, dt \qquad =$$

di nuovo per parti

$f'(t) = -2t$ (dispari)

$$= \frac{1}{n^2}\left(-2\pi(-1)^n - 2\pi(-1)^n\right) + \frac{1}{-n^2}\underbrace{\left[-2\,\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} =$$

$$\frac{-4\pi(-1)^n}{n^2} \leftarrow c_n\, 2\pi$$

$$\boxed{c_n = \frac{-2}{n^2}(-1)^n} \leftarrow c_n = c_{-n}$$

Dato che f è regolare a tratti posso scrivere

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 - 2\sum_{n\in\mathbb{Z}\; n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int} = \frac{2}{3}\pi^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} e^{int}$$

$$\underbrace{- 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-int}}_{\text{ho riscritto la parte con } n<0} = \frac{2}{3}\pi^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\, 2\cos(nt)$$

$$\pi^2 - t^2 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

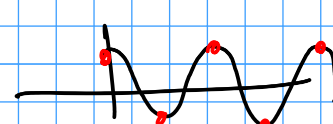
Se metto $t=0$ trovo

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \left(\frac{2}{3}-1\right)\pi^2 = -\frac{1}{3}\pi^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{12}\pi^2$$

Se metto $t=\pi$ trovo

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{2}{3}\pi^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$



Avrei potuto calcolare direttamente la forma reale dicendo

$a_0 = c_0 = \frac{2}{3}\pi^2$ (il calcolo è lo stesso) . Se $n \geq 1$

$b_n = 0$ PERCHÉ f è PARI

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$\pi a_n = \underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0\ (f(\pm\pi)=0\ \sin=0)} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt) =$$

$$-\frac{1}{n}\left[f'(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{n^2}\left(-2\pi\cos(n\pi) - 2\pi\cos(-n\pi)\right) - \underbrace{\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}(-2)\cos(nt)\,dt}_{=0}$$

$$-\frac{4}{n^2}(-1)^n\pi = a_n\pi$$

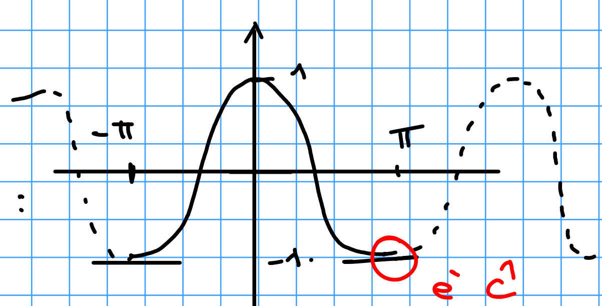
$$\boxed{a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$ che coincide con quanto trovato prima.

OSS. Dato che i c_n (gli a_n e i b_n) sono ASSOLUTAMENTE sommabili ($|c_n| = \frac{4}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$) allora la serie di Fourier converge uniformemente.

Mentre $n|c_n|$ non è sommabile $\longleftarrow$. Se $\sum n|c_n| < +\infty$ allora f sarebbe C^1 ma questo non è vero a causa dei punti $\pm\pi$

Altro esempio

Cerco una funzione così :



$$\left(\begin{matrix} T = 2\pi \\ \omega = 1 \end{matrix}\right)$$

per esempio $f(t) = a t^4 + b t^2 + c$

$f'(t) = 4 a t^3 + 2 b t$ ← si deve annullare in $t = 0, \pi, -\pi$

$f'(0) = 0$ per costruzione. $f'(\pi) = 0 \iff 4 a \pi^2 + 2 b = 0$

$\boxed{b = -2 a \pi^2}$ ← se è verificata, automaticamente $f'(-\pi) = 0$

Se impongo $f(0) = 1$ trovo $c = 1$

Se impongo $f(\pi) = -1$ trovo $a \pi^4 - 2 a \pi^4 + 1 = -1$

$-a \pi^4 = -2$ $\quad a = \frac{2}{\pi^4}$ $\quad$ Quindi

$$f(t) = \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1$$

su $t \in [-\pi, \pi]$ e poi 2π periodica

Cerco i c_n $\quad$ $\boxed{f \text{ è pari}}$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{\pi^4} \frac{t^5}{5} - \frac{4}{\pi^2} \frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{5}\pi - \frac{4}{3}\pi + \pi \right) = \frac{6 - 20 + 15}{15}$$

$$= \frac{1}{15} \qquad \boxed{c_0 = \frac{1}{15}}$$

Se $n \geq 1$

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt = \Bigg[\overbrace{f(t) \frac{e^{-int}}{-in}}^{\text{ZERO}} \Bigg]_{-\pi}^{\pi}$$

$f(\pi) = f(-\pi)$

$e^{-in\pi} = e^{-(in\pi)}$

$$+ \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{in} \Bigg[\overbrace{f'(t) \frac{e^{-int}}{-in}}^{\text{ZERO}} \Bigg]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(in)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) e^{-int}\, dt =$$

$f'(-\pi) = f'(\pi) = 0$

$$-\frac{1}{n^2}\Big[\overbrace{f''(t)\frac{e^{-int}}{-in}}^{\text{ZERO}}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{in^3}\int_{-\pi}^{\pi} f'''(t)\,e^{-int}\,dt =$$

$f''(\pi)=f''(-\pi)$

$e^{-in\pi}=e^{in\pi}=(-1)^n$

f'' è pari $\Big(\underbrace{f''(t)=\frac{24}{\pi^4}t^2-\frac{8}{\pi^2}}_{\text{è PARI}}\Big)$

$\frac{48}{\pi^4}$ ho integrando nullo

$$-\frac{1}{in^3}\Big[f'''(t)\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f^{IV}(t)\,e^{-int}\,dt}_{=0}$$

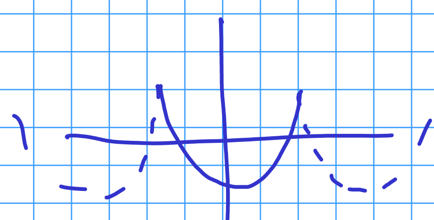
$$= -\frac{1}{n^4}\Big(f'''(\pi)(-1)^n - f'''(-\pi)(-1)^n\Big) = -\frac{2}{n^4}f'''(\pi)(-1)^n =$$

$\Big(f'''(t)=\frac{48}{\pi^4}t\Big)$ $-\frac{2}{n^4}\,\frac{48}{\pi^4}\,\pi\,(-1)^n$

$\boxed{c_n = -\frac{48}{\pi^4 n^4}(-1)^n}$ ← NOTO CHE $\sum n^2|c_n| < +\infty$

da cui f deve essere C^2 (e le serie delle derivate 0, 1, 2 convergono unif)

VERIFICA   Quanto fanno $f''(\pi)$ e $f''(-\pi)$ ← devono essere eguali - se no c'è un errore.



f'' è continua!!   TORNA

DUNQUE $f(t) = \frac{1}{15} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{(-1)^n}{n^4}e^{int} =$ (come prima)

$$\frac{1}{15} - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos(nt)$$

Se metto $t=0$ trovo $1 = \frac{1}{15} - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

$$\frac{14}{15} = -\frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \iff \sum \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{\pi^4}{15} \frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{96}_{\,48}} = \frac{7\pi^4}{15 \cdot 48}$$

Se metto $t=\pi$ trovo $-1 = \frac{1}{15} - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \iff$

$$-\frac{\cancel{16}^{\,4}}{15} = -\frac{\cancel{96}^{\,\cancel{24}\,6}}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Partiamo ora da un $L>0$ e una funzione f definita (solo) su $[0,L] \to \mathbb{R}$ (f è reale!)

Vorrei uno sviluppo di f in SOLI SENI / SOLI COSENI

$\rightarrow$ Definisco $\tilde{f} : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in]0, L[\\ 0 & t = -L, 0, L \quad \text{(conta poco)} \\ -f(-t) & \text{se } t \in]-L, 0[\end{cases}$$

$\tilde{f}$ è dispari!! Poi se voglio estendo $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo che sia $2L$-periodica. Posso fare lo sviluppo di Fourier (REALE) di $\tilde{f}$: $T = 2L$ $\omega_1 : \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$

$$\tilde{f}(x) = \cancel{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n \cos(n\omega_1 x)} + b_n \sin(n\omega_1 x)$$

MA essendo dispari $\tilde{f}$ ha la prop. $a_n = 0 \ \forall n$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x) \quad \text{dove}$$

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin(n\omega_1 x)\, dx = \frac{1}{L}\, 2 \int_0^L \tilde{f}(x) \sin(n\omega_1 x)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_1 x)$$

DUNQUE HO TROVATO CHE:

(1) se f è regolare a tratti su $[0, L]$ vale la formula

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\omega_1 n x)$$

dove $u_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_1 x$ $\left(e\ \omega_1 = \frac{\pi}{L} \right)$

~~se $x = 0$ $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ $f(0^-) = \lim_{x \to L^-} f(x)$~~

~~se $x = L$ $f(L^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ $f(L^-) = \lim_{x \to L^-} f(x)$~~

~~cioè a sinistra della formula dove metto $\frac{\tilde{f}(t^+) + \tilde{f}(t^-)}{2}$~~

VEDERE LA PROSSIMA LEZIONE

(2) Viceversa se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$, se

$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |u_n| < +\infty$ ($k \in \mathbb{N}$) allora

f è C^k , le serie delle derivate da 0 a k sono unif conv. , e si può derivare sotto il segno di serie (fino alla derivata k-esima)

su $[0, L]$

IN REALTÀ SO CHE $\tilde{f}$ è di classe C^k $\Rightarrow$ f è di classe C^k ma ho anche che

$\boxed{f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) \text{ per } k \text{ pari}}$ / NO INFO se k è dispari

IN PARTICOLARE $f(0) = f(L) = 0$

Se k è pari $f^{(k)}$ è una funzione dispari

Perciò $\tilde{f}^{(k)}$ è dispari e $2L$ periodica dunque

$\tilde{f}^{(k)}(0)=0$, $\tilde{f}^{(k)}(-L) = -\tilde{f}^{(k)}(L)$ per la disparità

$\tilde{f}^{(k)}(-L) = \tilde{f}^{(k)}(L)$ per periodicità