Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 48   20/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Finora abbiamo visto le serie di F. "complesse" ... $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T periodica

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} \qquad c_n \dots$$

Supponiamo che f sia reale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Già visto che, in tal caso, $\boxed{c_{-n} = \overline{c_n}}$. Allora possiamo scrivere

$$\sum_{n<0} c_n e^{in\omega t}$$

$$f(t) = \underbrace{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t}}_{\text{li metto insieme}} =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n} e^{-in\omega t} \qquad e^{-in\omega t} = \overline{e^{in\omega t}}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n e^{in\omega t}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t}\right)$$

NOTA CHE $c_0 = c_{-0} = \overline{c_0} \Rightarrow c_0$ è reale (sempre perché f è reale)

DUNQUE se f è reale

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t}\right) = (*)$$

Scriviamo $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ con $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$
$\beta_0 = 0$

$$(*) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\Big(\left(\alpha_n + i\beta_n\right)\left(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right)\Big) =$$

$$= \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n \cos(n\omega t) - \beta_n \sin(n\omega t)\Big)$$ DUNQUE

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

se $a_0 = \alpha_0$ $\quad a_n = 2\alpha_n$ $\quad b_n = -2\beta_n$ cioè

$a_0 = \mathrm{Re}(c_0) = c_0$, $\quad a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$ $\quad b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

$\Leftrightarrow$ $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)$ e se $n \geq 1$ (a_0 è la media di f)

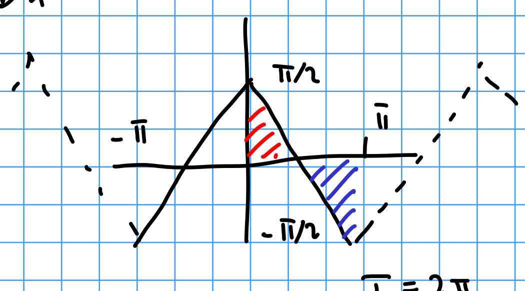
$$a_n = \left(\frac{2}{T}\mathrm{Re}\left(\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt\right) = \right) \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \left(-\frac{2}{T}\mathrm{Im}\left(\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt\right) = \right) \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

VERSIONE REALE DELLA SERIE DI FOURIER

OSS. f reale. f è pari $\Leftrightarrow$ c_n sono reali pari $\Leftrightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$
$c_{-n} = c_n$
f reale. f è dispari $\Leftrightarrow$ c_n imm. puri dispari $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$
$c_{-n} = -c_n$
(si vede facilmente dalle proprietà sopra - oppure dalle formule che danno a_n e b_n

ESEMPIO (visto)



$$\left(\begin{array}{l} f(t) = \frac{\pi}{2} - |t| \\ \text{in } [-\pi, \pi] \\ \omega = 1 \end{array}\right)$$

Se cerco la serie di F. reale posso usare le def di a_n, b_n scritte sopra:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = 0$$

$b_n = 0$ (f è pari) e se $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \overset{(\text{PARITÀ})}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(nt)\,dt =$$

per parti

$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(-1)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ dispari} \quad (n = 2k+1) \end{cases}$$

DUNQUE

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$$

IN QUESTO CASO l'eguaglianza vale $\forall t$ e la serie converge uniformemente perché $|a_n| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$

$0 = \sum |b_n| < +\infty$

$$\left(\Rightarrow \sum |c_n| < +\infty \Rightarrow \text{conv. unif}\right)$$

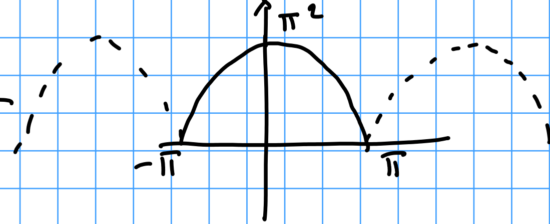
Se per esempio prendo $t = 0$ trovo

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \iff \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Se metto: $t = \pi$ ~~trovo la serie a segni alterni~~.

$$-\frac{\pi}{2} = f(\pi) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\underbrace{\cos((2k+1)\pi)}_{-1} = \ldots$$ trovo lo stesso RIS

ALTRO ESEMPIO



$T = 2\pi \qquad \omega = 1$

$f(t) := -(t-\pi)(t+\pi) = \pi^2 - t^2$ tra $-\pi$ e π (e poi periodicizzata)

Cerchiamo lo sviluppo di Fourier so complesso che vale

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

se $n=0$ devo fare $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \overset{\text{PARITÀ}}{=} \frac{2}{2\pi}\left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} =$

$$\frac{1}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}\pi^2 = c_0}$$

se $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

. . . finiamo la prossima volta