Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 47   19/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

– $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e in $(0,0)$ la definisco come mi pare ($(0,0)$ è trascurabile in $\mathbb{R}^2$)

f è integrabile / ammette integrale
$|f|$ è integrabile / ammette integrale

OSSERVO che f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\Rightarrow$ f è misurabile
(lo stesso vale per $|f|$)

ALLORA
- $|f|$ ammette integrale in quanto è una funzione misurabile e ≥ 0
- $|f|$ è integrabile $\Leftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^2} |f|\,dx\,dy < +\infty$

Per vedere se $|f|$ è integrabile posso usare i teoremi studiati
(Tonelli – Cambio di variabile VALGONO NEL CASO DI $f \geq 0$ f mis.)
Uso le coordinate polari per $|f|$ $\Rightarrow$ l'integrale diventa

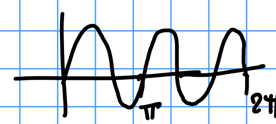
$$\iint_{\{\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} \left| \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{(\rho^2)^2} \right| \rho\,d\rho\,d\theta \overset{\text{(TONELLI)}}{=} \left(\int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta|\,d\theta \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} \right)$$

È chiaro che $\int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta|\, d\theta > 0$, mentre $\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} = +\infty$

$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} |f|\, dx\,dy = +\infty$ DUNQUE $|f|$ NON È INTEGRABILE

- $$\int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta|\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin(2\theta)|\, d\theta \overset{\text{Periodicità}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(2\theta)|\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^{\pi} |\sin(2\theta)|\, d\theta =$$ NOTO CHE È ANCHE π-PER ...



$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\, d\theta = 2\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2 \quad (>0)$$

- $\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} = +\infty$ per vari motivi

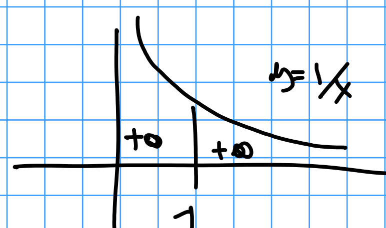
$$\| $$

$$\int_0^{1} \frac{d\rho}{\rho} + \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho}$$ ed entrambi sono $+\infty$ perché l'integrale improprio di Riemann è $+\infty$!!

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{d\rho}{\rho} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \rho\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} -\ln(\varepsilon) = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{d\rho}{\rho} = \lim_{c \to +\infty} \left[\ln(\rho)\right]_1^c = \lim_{c \to +\infty} \ln(c) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ <+\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ <+\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

- Se guardo f devo dire:
  - f non è integrabile (visto che $|f|$ non è integrabile)
  - f non ammette integrale in quanto non è integrabile e non è ≥ 0

retta in $\mathbb{R}^3$ → trascurabile

$$f(x,y,z) = \frac{zx}{x^2+y^2} \quad \text{definita su } \mathbb{R}^3 \setminus \{\underbrace{\text{asse } z}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$$

(Potrei definire $f(0,0,z) = \begin{cases} +\infty & \text{se } z>0 \\ 0 & \text{se } z=0 \\ -\infty & z<0 \end{cases}$ (NOTARE CHE POI MI METTO su $\{x \geq 0\}$))

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ 0 \leq z \leq \sqrt{2}(x^2+y^2) \}$$

$$D_1 = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ z \geq \sqrt{2}(x^2+y^2) \}$$

- DOMANDE $\quad f$ è integrabile su D / D_1

in caso che la risposta sia affermativa calcolo gli integrali

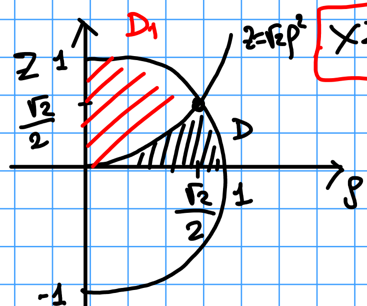
OSSERVO CHE IN D / D_1 $\quad f \geq 0 \quad$ DUNQUE

l'integrale esiste (in $[0,+\infty]$).

Conviene passare in coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, dz\, d\theta$$

D (D_1) diventa $\left\{ \rho^2+z^2 \leq 1, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq z \leq \sqrt{2}\rho^2 \right\}$ ($z \geq \sqrt{2}\rho^2$)



$$\boxed{x \geq 0 \qquad \cos\theta \geq 0 \longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{2}\rho^2 \\ z^2+\rho^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} z^2 &= 2\rho^4 \\ 2\rho^4+\rho^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm3}{4} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si arriva a:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \iint_{\left\{\substack{z^2+\rho^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}\rho^2}\right\}} \frac{\rho\cos\theta\, z}{\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_{\left\{\substack{z^2+\rho^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}\rho^2}\right\}} z\, d\rho\, dz$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = 2 \left[\sin\theta \right]_0^{\pi/2} = 2$$

considero integro in ρ a z fissato e poi in z

$z^2+\rho^2 \le 1 \qquad 0 \le z \le \sqrt{2}\rho^2$

$\rho \le \sqrt{1-z^2} \qquad \rho \ge \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}$

$$\int_{\begin{cases} z^2+\rho^2\le 1 \\ 0\le z\le\sqrt{2}\rho^2 \end{cases}} z \, d\rho \, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}}^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \right) dz =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} z \left[\rho \right]_{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}}^{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} z \left(\sqrt{1-z^2} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}} \right) dz =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \sqrt{1-s}\, ds - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int_0^{\sqrt{2}/2} z^{3/2} \, dz = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-s)^{3/2}(-1) \right]_0^{1/2}$$

$(s = z^2 \quad ds = \frac{1}{2} 2z\, dz)$

$2^{-3/2} \qquad 2^{-1/4} \qquad 2^{1} \qquad 2^{-(5/2)(1/2)}$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[\frac{2}{5} z^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{1/4}} \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2^{1/2}} \right)^{5/2} =$$

$$-\frac{1}{3} 2^{-3/2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} 2^{-1/4+1-5/4}$$

$$1 \quad \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} + 1 = -$$

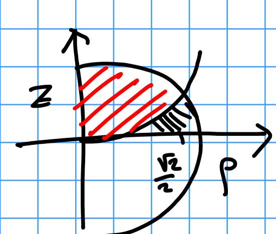
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} 2^{-3/2} - \frac{1}{5} 2^{-1/2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{11}{30} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$ $\leftarrow$ lo moltiplico per 2 e ho il risultato

$$\longrightarrow \frac{2}{3} - \frac{11}{30}\sqrt{2}$$

Proviamo a calcolare $\iiint_{D_1} f$ . . . stessi calcoli . . .



$$= \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}_{=2} \int_{\left\{\substack{z^2+\rho^2 \le 1 \\ z \ge \sqrt{2}\rho^2}\right\}} z \, d\rho \, dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{\sqrt{2}\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} 2z \, dz \right) d\rho =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \left[z^2 \right]_{\sqrt{2}\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \int_0 \left((1-\rho^2) - 2\rho^4 \right) d\rho =$$

$$\left[\rho - \frac{\rho^3}{3} - 2\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2}\frac{1}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{30-5-3}{30} \right)$$

$$\frac{11}{30}\sqrt{2}$$

Se i conti sono giusti $\Rightarrow$ la somma dei due integrali fa $\frac{2}{3}$

che dovrebbe essere $\iiint_B f \, dx\,dy\,dz$

dove $B: \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad x \ge 0 \quad , z \ge 0 \} \quad =: D_1 \cup D$

FACCIO IN ALTRO MODO $\iiint_B f$ COORD. CILINDRICHE

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\cos\varphi$$

$$B \rightsquigarrow \left\{ 0 \le \rho \le 1 , -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} , \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$z \ge 0 \qquad \cos\varphi \ge 0 \qquad \boxed{0 \le \varphi \le \pi/2}$$

$$x \ge 0 \qquad \cos\theta \ge 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} dx\,dy\,dz = \\ \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \end{array} \right)$$

L'integrale diventa

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{(\rho\cos\theta\sin\varphi)(\rho\cos\varphi)}{\rho^2\sin^2\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho$$

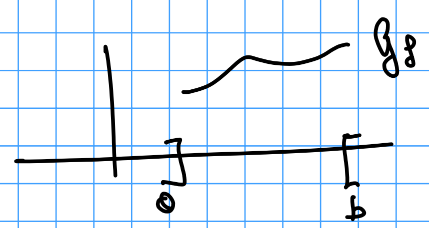
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho$$

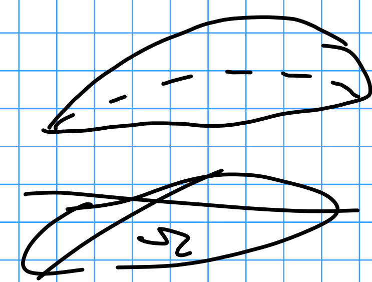
$2 \cdot 1 \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ TORNA

DOMANDA (~ DINI) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$

(grafico) $G_f := \{(x,y) : x \in \Omega \quad y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$

Se $N = 1$ $G_f \in \mathbb{R}^2$ ed è il solito grafico di f visto a Analisi 1





$P_0 = (x_0, y_0) \in G_f$ cerco le "normali" a G_f

Che ipotesi servono affinché G_f sia un vincolo di codimensione K (con che K??)

Se definisco $G(x,y) = y - f(x)$ $\Omega_1 = \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{N+1}$

Sono nella situazione del Dini: $G : \underset{N+1}{\Omega_1} \to \underset{1}{\mathbb{R}}$

$$G_f = \{P \in \Omega_1 : G(P) = 0\}$$

Per applicare Dini serve che $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ MA

$\frac{\partial}{\partial y} G = \frac{\partial}{\partial y}(y - f(x)) = 1 \neq 0$ NON SERVE NIENTE

Se G_f è un grafico (di una f di classe C^1) $\Rightarrow G_f$ è un vincolo regolare di codimensione 1

• NORMALI A G_f ??

Se $V = \{ G = 0 \}$ dove $G : \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\Omega \in \mathbb{R}^N$ $N > M$

$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_M \end{pmatrix}$ e ∇G_i sono lin indipendenti (per ipotesi)

LO SPAZIO NORMALE A V in $P_0 \in V$ è

lo span $(\nabla G_1 \dots \nabla G_M)$

Nel caso di $M = 1$ le cose diventano

· IPOTESI : $\nabla G(P_0) = \nabla G_1(P_0) \neq 0$

· Spazio normale = span $\{ \nabla G(P_0) \} = \{ \lambda \nabla G(P_0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$

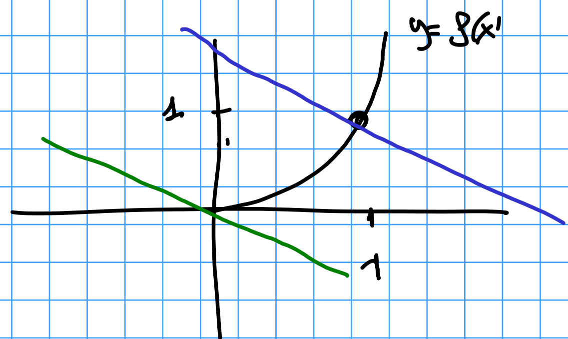
Nel caso del grafico : $G(x,y) = y - f(x) \Rightarrow \nabla G \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 1 \end{pmatrix}$

Spazio normale $= \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\nabla f(P_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$

Per es se $f(x) = x^2$

$x_0 = 1$

$y_0 = f(x_0) = 1$



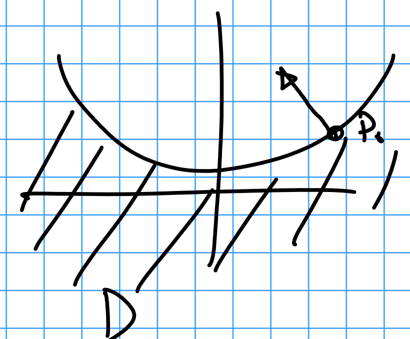
la retta verde è data da $\{ \lambda \begin{pmatrix} -f'(1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x(t) = -2t$ $y(t) = t$ $y = t$ $x = -2y$

$\boxed{y = -\frac{x}{2}}$

Se considero $D = \{ y \leq f(x) \}$

$= \{ G(x,y) \leq 0 \}$



$\Rightarrow \nabla G(P_0)$ rappresenta una normale uscente da D

ESERCIZIO (λ MOLTIPLICATORI)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $2x^3 - 15x^2 - (x+3)y^2$ e sia

$$B = \{x^2+y^2 \leq 9\} = \{G(x,y) \leq 0\}$$
$$G(x,y) = x^2+y^2-9$$

VOGLIO TUTTI I PTI STAZIONARI VINCOLATI SU B

È chiaro che B è un dominio regolare

In questo caso i punti sono di DUE TIPI

(A) $\nabla f(x,y) = 0 \qquad G(x,y) < 0$

(B) $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y) \quad G(x,y) = 0 \qquad$ per $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 30x - y^2 \\ -2y(x+3) \end{pmatrix} \qquad \nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

(A) $\begin{cases} 6x^2 - 30x = y^2 \\ -2y(x+3) = 0 \\ x^2+y^2 < 9 \end{cases} \leftarrow \quad y=0$ oppure $x=-3$

fuori da B

$y=0 \qquad 6x^2 - 30x = 0 \iff x=0 \,/\, x=5 \qquad (0,0) \quad (5,0)$

$x=-3 \qquad 54 + 90 = y^2 \qquad y^2 = 144 \qquad (-3,12) \quad (-3,-12)$

fuori da B

(B) $\begin{cases} 6x^2 - 30x - y^2 = 2\lambda x \\ -2y(x+3) = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$ POSSO METTERE λ (prendendo $G = \frac{x^2+y^2-9}{2}$)

GUARDO LA II° RIGA $-2y(x+3+\lambda) = 0 \quad \begin{cases} y=0 \\ x+3+\lambda=0 \end{cases}$

$\boxed{y=0} \qquad x = \pm 3 \quad$ (dalla terza) $\qquad$ (la I° è OK scegliendo λ ..)

$$\boxed{(3,0)\quad(-3,0)}$$

$\boxed{\lambda = -x-3}$ ← lo metto nella I° rigo $6x^2-30x-y^2 = 2\lambda x$

$$6x^2-30x-9+x^2 = -2(x+3)x = -2x^2-6x$$

$$9x^2-24x-9=0 \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144+81}}{9} = \frac{12 \pm \sqrt{225}}{9}$$

$$= \frac{12 \pm 15}{9} = \begin{cases} 3 \\ -1/3 \end{cases}$$

$x = 3 \rightarrow y=0$ già vist $\qquad x = -\frac{1}{3} \qquad y^2 = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9}$

$y = \pm \frac{4\sqrt{5}}{3}$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right) \qquad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$$

Se voglio $\max\limits_{B} f$ / $\min\limits_{B} f$ posso calcolare f in questi punti e prendere il valore max / min

$$f = 2x^3 - 15x^2 - (x+3)y^2$$

$f(0,0) = 0$ MAX

$f(3,0) = 2\cdot 27 - 15\cdot 9 - 6\cdot 0 = 2\cdot 27 - 5\cdot 27 = -3\cdot 27 = -81$

$f(-3,0) = -2\cdot 27 - 15\cdot 9 - 0 = -2\cdot 27 - 5\cdot 27 = -7\cdot 27 = -189$

MIN

$f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4\sqrt{5}}{3}\right) = \ldots - \frac{229}{9}$

$$G(x,y,z) = e^{xyz+2} + 2(x+y+z) - 5$$

$P_0 \in \mathcal{M}$
(si verifica…)

$$\mathcal{M} = \{ G = 0 \} \subset \mathbb{R}^3 \qquad P_0 = (2, 1, -1)$$

"VINCOLO DI CODIMENSIONE 1 IN $\mathbb{R}^n$" ← se posso dire $\nabla G \neq 0$

nei punti di $\mathcal{M}$.

$$\nabla G = \begin{pmatrix} yz\, e^{xyz+2} + 2 \\ xz\, e^{xyz+2} + 2 \\ xy\, e^{xyz+2} + 2 \end{pmatrix}$$

Se volessi vedere se $\mathcal{M}$ è regolare dovrei mostrare che

NON CI SONO SOLUZIONI DI

$$\begin{cases} yz\, e^{xyz+2} + 2 = 0 \\ xz\, e^{xyz+2} + 2 = 0 \\ xy\, e^{xyz+2} + 2 = 0 \\ e^{xyz+2} + 2(x+y+z) = 5 \end{cases}$$

PUÒ DARSI CHE SI RIESCA A DIM CHE NON CI SONO SOL.

Nel compito si chiedeva di vedere che $\mathcal{M}$ è un grafico

$\boxed{z = f(x,y)}$ VICINO A P_0

(oppure $x = f(y,z)$ / $y = f(x,z)$)

MI SERVE che $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0$ cioè che

$xy\, e^{xyz+2} + 2 \neq 0$ se $x = 2$ $y = 1$ $z = -1$

viene $2 e^0 + 2 = 4 \neq 0$. DUNQUE $\mathcal{M}$ è un grafico vicino a P_0

Vediamo $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$. USANDO DINI SO CHE

$$\underset{1\times 2}{\frac{\partial f}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial z}} \underset{1\times 2}{\frac{\partial G}{\partial(x,y)}} \simeq$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{\partial G}{\partial x} \Big/ \frac{\partial G}{\partial z}\Bigg|_{\text{u}\,(2,1,-1)} = -\frac{-1+2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = yz\,e^{xyz+2} + 2$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = xz\,e^{xyz+2} + 2$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = xy\,e^{xyz+2} + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{-2+2}{4} = 0$$