Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 46 18/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Serie di Fourier:

se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodico, definisco i coeff di Fourier

def ponendo
$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Allora $\boxed{\text{(Teorema)}}$ (non è per nulla semplice!)

se f è regolare a tratti si ha

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

SERIE DI FOURIER di f

(= $f(t)$ se t non è uno dei punti "singolari")

(la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$) (se f non è continua NON POSSO ASPETTARMI LA CONV. UNIF.)

- Per avere la convergenza unif devo chiedere maggiore regolarità per f.

SI HA (No dim)

Se f è C^1 $\Rightarrow$ la serie conv. unif.

IN OGNI CASO

TEOREMA Supponiamo f integrabile su $[0,T]$ (da cui, per periodicità, si ricava che f è integrabile su ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$ se $-\infty < a \leq b < +\infty$). Allora i c_n sono ben definiti

$$\Big(\underbrace{|f(t)\, e^{-in\omega t}|}_{\uparrow} = |f(t)|\, \underbrace{|e^{-in\omega t}|}_{=1} = |f(t)| \leftarrow \text{INTEGRABILE} \Big)$$

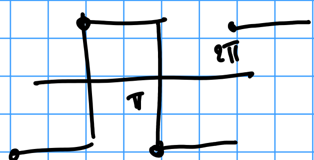
INTEGRABILE $\Rightarrow$ i c_n esistono

Allora $c_n = 0 \ \forall n \iff f(t) = 0$ q.o. t

Ne segue che

f_1 e f_2 hanno gli stessi coeff. di Fourier $\iff f_1 = f_2$ q.ovunque.

ES



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \qquad \dots \qquad (T = 2\pi,\ \omega = 1)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\, i = \begin{cases} c_n = 0 & n \text{ pari} \quad n = 2K \\ -\dfrac{2i}{n\pi} & n \text{ dispari} \quad n = 2K-1 \end{cases}$$

← IMMAGINARIO PURO, DISPARI

Dunque, per quanto detto,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{-2i}{(2K+1)\pi} e^{i(2K+1)t} = (*)$$

$\|$

$\big(f(t)$ se $t \neq m\pi$, viene zero se $t = m\pi \big)$

Se dividiamo la serie nei termini >0 e in quelli <0 $\Rightarrow$

$$(*) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{-2i}{(2K+1)\pi} e^{(2K+1)it} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{-2i}{-(2K+1)\pi} e^{-(2K+1)it}$$

← ho fatto un cambio di indice.

$$\frac{-2i}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}e^{(2k+1)it}-\frac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)it}\right)=$$

$$\frac{-2i}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(e^{(2k+1)it}-e^{-(2k+1)it}\right)=\qquad\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta\right)\quad \theta=(2k+1)t$$

$$\frac{-2i}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i\sin((2k+1)t)}{(2k+1)}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)},$$

$$\boxed{\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)}=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ -1 & \pi<t<2\pi\end{cases}}$$

Per esempio, se metto $t=\frac{\pi}{2}$ trovo

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k\pi+\pi/2)}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

DUNQUE HO TROVATO CHE

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\dots=\frac{\pi}{4}$$

<u>Teorema</u> Se f è integrabile su $[0,T]$ allora i coefficienti c_n, costruiti mediante la formula sopra, hanno la proprietà

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

(NO DIM)

Altro punto di vista: parto dai c_n.

Def. Chiamo "serie trigonometrica complessa" una serie del tipo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad (\text{dove } (c_n) \text{ è una succ. in } \mathbb{C})$$

Potrei dire subito che voglio $c_n \to 0$

Mi chiedo per quali t $f(t)$ esiste (dipenderà dalle proprietà dei c_n)

IDEA: PIÙ i c_n sono "SOMMABILI" PIÙ la serie converge e la f è regolare

TEOREMA (1) Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}| < +\infty \right)$

allora la serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ è UNIFORMEMENTE CONVERGENTE su $[0,T]$. DUNQUE la sua somma $f(t)$ è ben definita su $\mathbb{R}$, è T-periodica ed è continua.

Inoltre

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = c_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è somma della sua serie di Fourier

DIM. Faccio vedere che la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$ è TOTALMENTE CONVERGENTE su $[0,T]$. Infatti se $f_n(t) = c_n e^{in\omega t}$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{0\le t\le T} |f_n(t)| = \sup_{0\le t\le T} |c_n|\underbrace{|e^{in\omega t}|}_{=1\ \forall t} = |c_n|$$

su $[0,T]$

DUNQUE $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ è totalmente convergente su $[0,T]$

($\Rightarrow$ f è continua). Fissiamo $k \in \mathbb{Z}$ e calcoliamo

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im\omega t}\Big) e^{-ik\omega t}\, dt$$

$=$ (a causa della conv. unif.) $\quad \left(\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=k \\ 0 & \text{se } m\neq k \end{cases}\right.$

$$\frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \int_0^T e^{im\omega t}\, e^{-imkt}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m T\, \delta_{mk} = c_k$$

$\#$

$$\left|e^{i\theta}\right| = \left|\cos\theta + i\sin\theta\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

OSS. La serie di F. è "un caso limite" della serie di potenze

$$\sum c_m e^{im\omega t} = \sum c_n \underbrace{\left(e^{i\omega t}\right)}_{\text{ha modulo } 1}{}^{n} = \sum c_n z^n \quad \text{dove } z = e^{i\omega t}$$

(con le ipotesi che ho di solito trovo $\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow 1$

DUNQUE STO GUARDANDO UNA SERIE DI POTENZE SUL BORDO DEL DISCO DI CONVERGENZA

OSS. (utile nei calcoli) Data f (integrabile)

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-im\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\, e^{-im\omega t}\, dt$$

se $b-a=T$. POSSO INTEGRARE SU UN QUALUNQUE INTERVALLO CHE ABBIA COME LUNGHEZZA IL PERIODO.

Per es.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-im\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3/4 T} f(t)\, e^{-im\omega t}$$

(RICORDO CHE f è T-periodica).

TEOR. (2) Se $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n| < +\infty}$ $\left(\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty\right)$

allora f è C^1 e si può derivare per serie:

$$f'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (in\omega) e^{in\omega t}$$

DIM Se $f_n(t) = c_n e^{in\omega t} \Rightarrow f_n$ è C^1 e $f_n'(t) = c_n (in\omega) e^{in\omega t}$

Dico che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n'$ è tot. conv. (su $[0,T]$) Infatti

$$\|f_n'\|_\infty = \sup_{0\le t\le T} |f_n'(t)| = \sup_{0\le t\le T} |c_n|\, n\, |\omega| \underbrace{|e^{in\omega t}|}_{=1} = n|\omega||c_n|$$

Per ipotesi $\sum \|f'\|_\infty < +\infty \Rightarrow$ la serie $\sum f_n'$ è TOT. CONV. $\Rightarrow$ è UNIF. CONV. $\Rightarrow$ vale il teo.

- NELLO STESSO MODO SI VEDE CHE

Se $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k |c_n| < +\infty \Rightarrow f$ è C^k e vale

$$\frac{d^k}{dt^k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{d^k}{dt^k} e^{in\omega t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (in\omega)^k e^{in\omega t}$$

PIÙ i c_n sono sommabili PIÙ regolare è f

ALTRE PROPRIETÀ. Torniamo al caso in cui è data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica e si costruiscono i coeff con detta espr.

- Se f è pari $\Leftrightarrow$ c_n sono pari $f(x) = f(-x) \Leftrightarrow c_{-n} = c_n$

  VALE ANCHE $\Leftarrow$

- Analogamente f dispari $\Leftrightarrow$ $c_{-n} = -c_n$ (c_n dispari)

- f è reale $\iff$ $c_{-n} = \overline{c_n}$

Dim della freccia $\Rightarrow$

- Caso $f(x) = f(-x)$. Allora (per quanto detto prima)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\, e^{-in\omega t} + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}$$

(cambio di variabile $s = -t$ nel primo integrale)

$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-s)\, e^{in\omega s}(-1)\,ds + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}$$ PASSO INDIETRO...

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega t}\,dt =$$ cambio di variabile $s = -t$

$$\frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} f(-s)\, e^{-in\omega s}(-1)\,ds = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(-s)}_{=f(s)}\, e^{-in\omega s}\,ds$$

$$= \frac{1}{T}\int f(s)\, e^{-in\omega s}\,ds = c_n$$

- Nel caso f dispari si fa lo stesso calcolo e si dimostra $c_{-n} = -c_n$

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e vediamo quanto fa

$$\overline{c_n} = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}} = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)\, e^{-in\omega t}}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\, \overline{e^{-in\omega t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t}\,dt = c_{-n}$$

(f è reale $\iff \bar{f} = f$)

DUNQUE f reale $\Rightarrow$ $\overline{c_n} = c_{-n}$

IN GENERALE a $z = a + ib$ $\quad \bar{z} = a - ib$

$z = a + ib \quad w = c + id \qquad zw = ac - bd + i(ad + bc)$

$\overline{zw} = ac - bd - i(ad + bc) \longleftarrow = \longrightarrow$

$\bar{z}\,\bar{w} = ac - (-b)(-d) + i(a(-d) + b(-c)) = ac - bd - i(ad + bc)$

$$\boxed{\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

IN PARTICOLARE

- f è reale pari $\iff$ c_n sono reali pari
- f è reale dispari $\iff$ c_n sono immaginari puri dispari

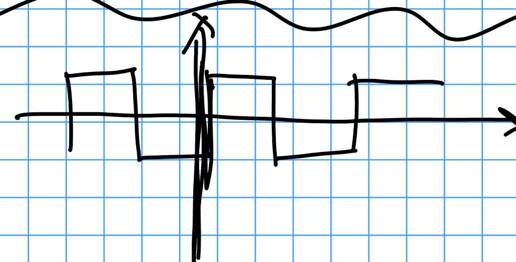
Per es. f reale dispari $\iff$ $c_{-n} = \overline{c_n}$, $c_{-n} = -c_n$

$\iff$ $\overline{c_n} = -c_n$ $\quad$ $c_{-n} = -c_n$

$z = a + ib \Rightarrow \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ $\quad$ $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$

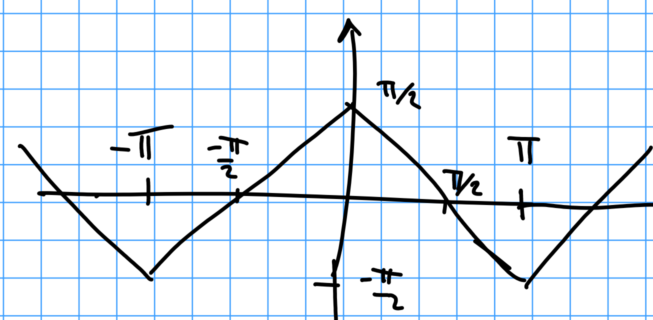
$a = 0 \iff z = -\overline{z}$ $\quad$ $b = 0 \iff z = \overline{z}$

OSS. l'onda quadra di prima è dispari



TORNA COL FATTO CHE i c_n sono immaginari dispari

ALTRO ESEMPIO (onda triangolare)



$(T = 2\pi, \omega = 1)$ cioè:

$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ se $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ed estesa in modo 2π-period. su tutto $\mathbb{R}$

f è reale pari $\Rightarrow$ c_n reali pari. Calcolo i c_n

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{0} f(t)\, e^{-int}\, dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

($s = -t$ nel primo integrale)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{f(-s)}_{f(s) = \frac{\pi}{2} - s \text{ su } [0,\pi]} e^{ins} \, ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \, e^{-int} dt =$$

(ho cambiato s in t nel I°)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\left(e^{int} + e^{-int}\right) dt = \text{ per parti}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\left(\frac{e^{int}}{in} - \frac{e^{-int}}{in}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_0^\pi (-1)\left(e^{int} - e^{-int}\right) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \left(-\frac{\pi}{2} \underbrace{\left(e^{in\pi} - e^{-in\pi}\right)}_{=0} + \frac{\pi}{2} \underbrace{\left(1 - 1\right)}_{=0} \right) +$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \left[\frac{e^{int}}{in} + \frac{e^{-int}}{in} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-n^2} \left[e^{in\pi} + e^{-in\pi} - 2 \right]$$

$$(\text{controllo}) \qquad -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2} \left(\cos(n\pi) - 1\right) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2} \left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

NOTA CHE $\frac{1}{n^2}$ è sommabile

$\Rightarrow$ la serie converge unif.