Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45 13/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Serie di Fourier

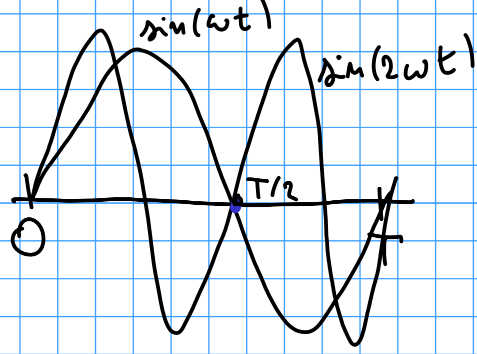
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

IDEA: Data una funzione f periodica di un certo periodo $T > 0$, la voglio "scomporre" in una somma di "armoniche", cioè di funzioni trigonometriche:

$$(1) \qquad \boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad t \in \mathbb{R}}$$

per opportuni a_n e b_n. QUI $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dunque

$\sin(n\omega t)$ e $\cos(n\omega t)$ sono tutte T-periodiche ($\frac{T}{n}$ periodiche)



(se $T = 2\pi$ $\omega = 1$)

IN REALTÀ SI PUÒ ANCHE VEDERE IL PROBLEMA nel caso in cui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica. In questo caso conviene cercare uno sviluppo del tipo

$$(2) \quad \boxed{f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imωt} \qquad c_n \in \mathbb{C}}$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \right)$$

osservo che la funzione

$$t \mapsto e^{imωt} = \cos(mωt) + i \sin(mωt)$$

è T periodica. Inoltre $|e^{imωt}| = 1$

Siccome le formule saranno più semplici comincio dal caso complesso, cioè da (2).

MI CHIEDO CHI SONO (se ci sono) per cui vale (2).

Ammettiamo che la (2) sia vero. Fissiamo $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo la (2) per $e^{-iωkt}$, e integriamo tra 0 e T.

$$\int_0^T f(t) e^{-iωkt} dt = \int_0^T \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n e^{imωt} e^{-ikωt} \right) dt =$$

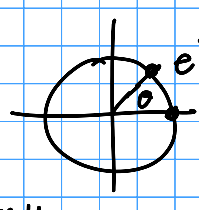
(suppongo che si possa scambiare $\int$ e $\sum$)

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \underbrace{\int_0^T e^{i(m-k)ωt} dt}_{\text{la posso calcolare!}} = (*)$$

$$\left(\int e^{\alpha t} = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \quad \text{anche se } \alpha \in \mathbb{C} \right)$$

$$\int_0^T e^{i(m-k)ωt} dt = \begin{cases} \text{se } m = k & \int_0^T e^0 dt = T \\ \text{se } m \neq k & \left[\dfrac{e^{i(m-k)ωt}}{i(m-k)ω} \right]_0^T = \end{cases}$$

$$= \frac{e^{i(m-k)ωT} - e^0}{i(m-k)ω} = \frac{e^{2\pi(m-k)i} - 1}{i(m-k)ω} = \frac{1-1}{\sim\sim} = 0$$



$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \,\text{sen}(\theta)$$
$$\theta = 2\pi(m-k)$$

DUNQUE $\displaystyle\int_0^T e^{i(m-k)ωt} = T \delta_{mk}$. dove $\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = k \\ 0 & \text{se } m \neq k \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t) e^{-ikωt} dt = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \delta_{mk} = T c_k$$

da cui

$$(3) \quad \boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}}$$

Def. I c_k definiti sopra sono detti "coefficienti di Fourier complessi" della funzione f.

A QUESTO PUNTO CI SI CHIEDE SE VALE LA (2) CON c_k definiti come sopra

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ dove i c_k sono come in (3)

Il problema NON È SEMPLICE. SI PUÒ DIM. CHE esistono f continue per cui la (2) non vale per "molti t"
PERCHÉ LA (2) valga serve che f sia "regolare"

Def. Dico che f è regolare a tratti (ricordo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T periodica) se esiste un numero finito di punti $0 \le t_0 < t_1 < \dots t_m \le T$ per cui:

su ogni $]t_{i-1}, t_i[$ f è di classe C^1 e
$|f'(t)|$ <u>è limitata</u> su $]t_{i-1}, t_i[$ $\quad i = 1 \dots m$

NON CHIEDO CHE f sia continua nei t_i

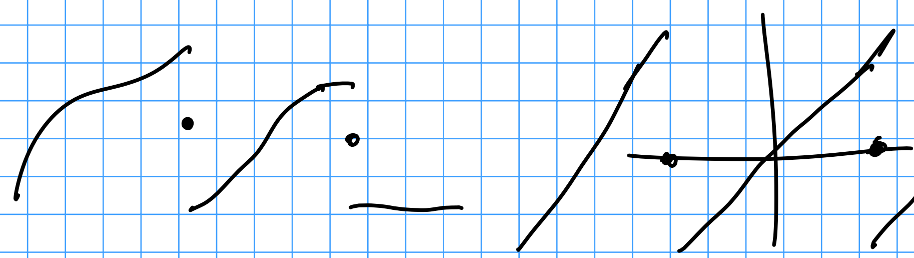
Se faccio l'ipotesi sopra si vede però che

$$\exists \lim_{t \to t_i^+} f(t) = f(t_i^+) \qquad \exists \lim_{t \to t_i^-} f(t) = f(t_i^-)$$

(segue dal fatto che $f'(t)$ è limitata fuori dai t_i)

TEOREMA Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge puntualmente (su $\mathbb{R}$) e

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t^+} f(t) + \lim_{t\to t^-} f(t)\right) \quad \left(= f(t) \text{ se } t \neq t_i\right)$$



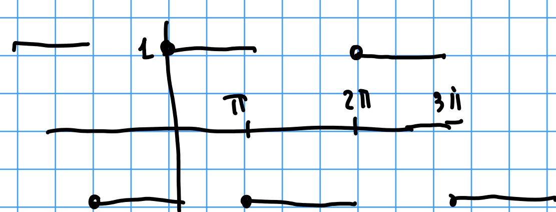
NO DIM.

ESEMPIO

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t < \pi \\ -1 & \text{se } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

(e poi periodicizzata su tutto $\mathbb{R}$)

$(T = 2\pi, \ \underline{\omega = 1})$



f è regolare a tratti

Calcolo i c_n.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-int}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-int}\right) = \quad {\color{red}(n \neq 0)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{-in}\frac{1}{2\pi}\left(e^{-in\pi} - e^{0} - e^{-in2\pi} + e^{-in\pi}\right) =$$

$$\frac{i}{n}\frac{1}{2\pi}\left((-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n\right) = \frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ -\dfrac{2i}{n\pi} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

se $n=0$ $c_0=0$ perché f ha medio nullo